1 Nombre dérivé

Définition 1. *Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a appartenant à I.*
On dit que la fonction f est dérivable en a lorsque $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie ℓ quand x tend vers a. (intuitivement : devient aussi proche de ℓ que l'on veut pourvu que x soit assez proche de a).
Cette limite est appelée le nombre dérivé de f en a. On la note $f'(a)$.

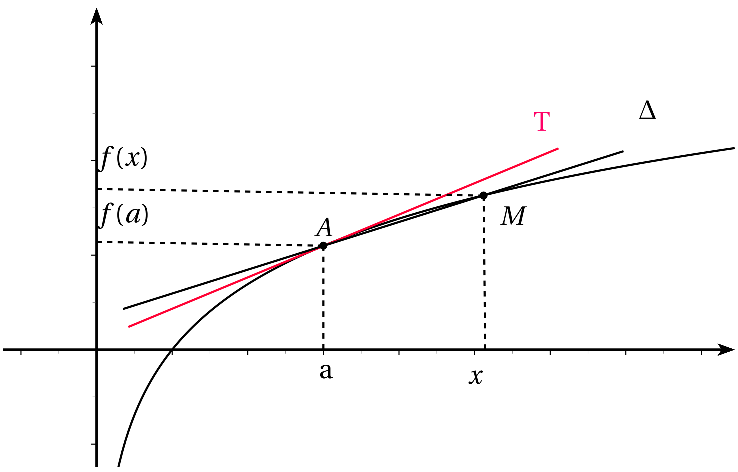
On note :
$f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ou $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

ATTENTION :
Il existe des fonctions non dérivables.
Par exemple $f(x) = \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0.

2 Tangente à une courbe

Définition 2. *Soit I un intervalle et f une fonction dérivable en $a \in I$.*
La tangente à la courbe représentative de f au point A d'abscisse a est la droite passant par A de coefficient directeur $f'(a)$.
Elle admet pour équation

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$



Soit M un point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x. Soit Δ la droite (AM). La droite Δ a pour coefficient directeur $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
Lorsque x tend vers a, le point M "tend" vers le point A et la droite Δ "tend" vers la tangente T en A qui a pour coefficient directeur $f'(a)$.

3 Fonction dérivée

3.1 Définition

Définition 3. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I.*
On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout a appartenant à I.
La fonction qui à tout a de I associe le nombre dérivé de f en a, est appelée la fonction dérivée de f sur I. On la note f'.

3.2 Dérivées des fonctions usuelles

3.2.1 Fonction affine

Théorème 1. *Toute fonction affine $f : x \mapsto mx + p$, est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = m$$

3.2.2 Fonction puissance

Théorème 2. *(Théorème admis)*
Pour tout entier naturel $p \geqslant 1$, la fonction $x \mapsto x^p$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = px^{p-1}$$

En particulier la fonction carrée $f : x \mapsto x^2$, est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2x$$

3.2.3 Fonction inverse

Théorème 3. *La fonction inverse $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$, est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et :*

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Plus généralement :
Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$; et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

3.2.4 Fonction racine

Théorème 4. *La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$, est dérivable sur $]0, +\infty[$ et :*

$$\forall x \in]0, +\infty[,\ f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

La fonction racine n'est pas dérivable en zéro.

3.2.5 Fonction cosinus, fonction sinus

Théorème 5.

- *La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x de $\mathbb{R}$,* $\sin'(x) = \cos(x)$
- *La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x de $\mathbb{R}$,* $\cos'(x) = -\sin(x)$

4 Régles de dérivation

4.1 Somme et multiplication par un réel

Théorème 6. *u et v sont deux fonctions dérivables sur I et λ un réel. Alors $u+v$ et λu sont dérivables sur I et :*

$$(u+v)' = u' + v' \qquad \text{et} \qquad (\lambda u)' = \lambda u'$$

4.2 Produit et quotient

Théorème 7. *u et v sont deux fonctions dérivables sur I. Alors uv est dérivable sur I et :*

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Théorème 8. *u est une fonction dérivable et ne s'annulant pas sur I. Alors la fonction $\frac{1}{u}$ est dérivable sur I et*

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

Théorème 9. *u et v sont des fonctions dérivables sur I, v ne s'annulant pas sur I.*
Alors la fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

5 Sens de variation d'une fonction dérivable

Théorème 10.
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- *Si la dérivée f' est positive sur I, alors la fonction f est croissante sur I.*
- *Si la dérivée f' est négative sur I, alors la fonction f est décroissante sur I.*
- *Si la dérivée f' est nulle sur I, alors la fonction f est constante sur I.*

Remarque : Extrémum d'une fonction

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$f(x_0)$	↗	

$f(x_0)$ est un minimal local.

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$f(x_0)$	↘	

$f(x_0)$ est un maximal local.

Soit f une fonction dérivable sur $]a, b[$ avec $x_0 \in]a, b[$.
Si la dérivée s'annule en x_0 en changeant de signe alors $f(x_0)$ est un extremum local sur $]a, b[$.

6 Les exercices

1. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :
   a. $f : x \mapsto x^2 + 3x - 4$ b. $f : x \mapsto 3x^2 - 5x + \sqrt{7}$ c. $f : x \mapsto x^3 + 2x - 1$

2. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :
   a. $f : x \mapsto x^2 + 3 + \dfrac{1}{x}$ b. $f : x \mapsto \dfrac{3}{4}x^2 + 7x - \dfrac{1}{x}$ c. $f : x \mapsto 5x^3 - 2x^2 + \dfrac{3}{x}$

3. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :
   a. $f : x \mapsto x^2 + x + \sqrt{x} + 1$ b. $f : x \mapsto 3x^3 - x^2 + 5\sqrt{x} + 3$ c. $f : x \mapsto 5x - \dfrac{2}{3}\sqrt{x} + \dfrac{5}{x} + 7$

4. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :
   a. $f : x \mapsto 3x\sqrt{x}$ b. $f : x \mapsto (4x+1)(2\sqrt{x}+3)$ c. $f : x \mapsto (x^7 - 1)(5 + \dfrac{2}{x})$

5. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :
   a. $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{3x-5}$ b. $f : x \mapsto \dfrac{x^2+2}{2x-1}$ c. $f : x \mapsto \dfrac{x-3}{x^2+x+1}$

6. Déterminer une équation de la tangente au point d'abscisse a à la courbe $\mathfrak{C}_f$ représentative de la fonction f.

   (a) $f : x \mapsto x^2 - 8x + 1$ $a = -3$
   (b) $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x-2}$ $a = 3$
   (c) $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 5x}{2x+7}$ $a = -1$

7. Donner le tableau de variations des fonctions suivantes :

   (a) $f : x \mapsto \dfrac{2x-3}{x-7}$
   (b) $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{5}{2}x^2 + 6x + 1$
   (c) $f : x \mapsto \dfrac{x-1}{x^2 - x - 6}$

7 Les exercices corrigés

1. a. $f'(x) = 2x + 3$ b. $f'(x) = 6x - 5$ c. $f'(x) = 3x^2 + 2$

2. a. $f'(x) = 2x - \dfrac{1}{x^2}$ b. $f'(x) = \dfrac{3}{2}x + 7 + \dfrac{1}{x^2}$ c. $f'(x) = 15x^2 - 4x - \dfrac{3}{x^2}$

3. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :
   a. $f'(x) = 2x + 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ b. $f'(x) = 9x^2 - 2x + \dfrac{5}{2\sqrt{x}}$ c. $f'(x) = 5 - \dfrac{1}{3\sqrt{x}} - \dfrac{5}{x^2}$

4. Dans les trois cas nous sommes dans le cas de la dérivation d'un produit.
   On utilise la formule : $(uv)' = u'v + uv'$.
   a. $f'(x) = \dfrac{9\sqrt{x}}{2}$ b. $f'(x) = \dfrac{12x\sqrt{x} + 12x + \sqrt{x}}{x}$ c. $f'(x) = \dfrac{35x^8 + 12x^7 + 2}{x^2}$

5. Dans les trois cas nous sommes dans le cas de la dérivation d'un quotient.
   On utilise la formule : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.
   a. $f'(x) = \dfrac{-13}{(3x-5)^2}$ b. $f'(x) = \dfrac{2(x^2 - x - 2)}{(2x-1)^2}$ c. $f'(x) = \dfrac{-x^2 + 6x + 4}{(x^2 + x + 1)^2}$

6. (a) $f : x \mapsto x^2 - 8x + 1$ $f'(x) = 2x - 8$
   $f(-3) = 9 + 24 + 1 = 34$ $f'(-3) = -6 - 8 = -14$
   La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -3 à pour équation :
   $y - 34 = -14(x+3)$ soit $y = -14x - 8$.

   (b) $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x-2}$ $f'(x) = \dfrac{-3}{(x-2)^2}$
   $f(3) = 1$ $f'(3) = -3$
   La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 3 à pour équation :
   $y - 1 = -3(x-3)$ soit $y = -3x + 10$.

   (c) $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 5x}{2x+7}$ $f'(x) = \dfrac{2x^2 + 14x - 35}{(2x+7)^2}$
   $f(-1) = \dfrac{6}{5}$ $f'(1) = \dfrac{-47}{25}$
   La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 à pour équation :
   $y - \dfrac{6}{5} = \dfrac{-47}{25}(x-3)$ soit $y = \dfrac{-47}{25}x - \dfrac{-17}{25}$.

7. (a) $f : x \mapsto \dfrac{2x-3}{x-7}$

$f(x) = \dfrac{2x-3}{x-7}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{7\}$

$f'(x) = \dfrac{-11}{(x-7)^2}$ donc $f'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}\setminus\{7\}$

Son tableau de variations est :

x	$-\infty$		7		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|$	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$	

f est décroissante sur $]-\infty, 7[$ et f est décroissante sur $]7, +\infty[$

(b) $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{5}{2}x^2 + 6x + 1$

$f(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{5}{2}x^2 + 6x + 1$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

$f'(x) = x^2 + 5x + 6$ qui s'annule en -2 et -3 donc $f'(x) < 0$ sur $[-3; -2]$

Son tableau de variations est :

x	$-\infty$		-3		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$-\frac{7}{2}$	$\searrow$	$-\frac{11}{3}$	$\nearrow$	

f est croissante sur $]-\infty, -3[\cup]-2, +\infty[$ et f est décroissante sur $]-3, -2[$

(c) $f : x \mapsto \dfrac{x-1}{x^2-x-6}$

$f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-x-6}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-2; 3\}$

$f'(x) = \dfrac{-x^2+2x-7}{(x^2-x-6)^2}$. $-x^2+2x-7$ a un discriminant strictement négatif donc $-x^2+2x-7 < 0$ sur $\mathbb{R}\setminus\{-2; 3\}$

Son tableau de variations est :

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|$	$-$	$\|$	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$	

f est décroissante sur $]-\infty, -2[\cup]-2, 3[\cup]3, +\infty[$.