1 Probabilité d'un événement

1.1 Ensemble des issues

On envisage une expérience aléatoire comportant un nombre fini d'issues.
On désigne par Ω l'ensemble de ces issues : $\Omega = \{\omega_1 ; \omega_2 ; ... ; \omega_n\}$.
On appelle cardinal de Ω le nombre des éléments de Ω . On le note card(Ω).

1.2 Événement

Un événement A est une partie de l'ensemble Ω des issues : $A \subset \Omega$.

- L'événement complémentaire de A, ou événement contraire de A, noté $\overline{A}$ contient tous les éléments de Ω qui ne sont pas éléments de A.
- Un événement élémentaire ne contient qu'une issue : par exemple $B = \{\omega_2\}$.
- Si A et B sont deux événements :
  - l'événement $A \cup B$ est réalisé si l'un au moins des événements A ou B est réalisé.
  - l'événement $A \cap B$ est réalisé si A et B sont réalisés tous les deux.
  - A et B sont dits incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.

1.3 Probabilité

À chacune de ces issues ω_i , on associe un nombre noté $P(\omega_i)$ avec :

$$0 \leqslant P(\omega_i) \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} P(\omega_i) = 1$$

À chaque événement $A = \{\omega_{i_1}, ..., \omega_{i_p}\}$ lié à l'expérience est associé alors le nombre $P(A)$ défini par :
$P(A) = P(\omega_{i_1}) + ... + P(\omega_{i_p})$

Propriétés 1.

- $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ *et* $P(\Omega) = 1$
- $P(A) + P(\overline{A}) = 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- *Si A et B sont incompatibles, alors* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- *Si tous les événements élémentaires $\{e_i\}$ ont la même probabilité, on dit qu'il y a équiprobabilité. On a alors :*

$$P(A) = \frac{\textit{Nombre des issues favorables à } A}{\textit{Nombre des issues possibles}} = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

2 Variables aléatoires

2.1 Définition

Définition 1. *Lorsque l'on associe à chaque issue liée à une expérience, un nombre réel, on dit qu'on définit une variable aléatoire sur Ω .*
Une variable aléatoire est donc une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$.
La variable X prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_k$, l'événement " X prend la valeur x_i " se note $(X = x_i)$, c'est l'ensemble de toutes les issues ω telles que $X(\omega) = x_i$.

2.2 Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition 2. *Soit X une variable aléatoire définie sur l'univers Ω et prenant les valeurs $x_1, \dots, x_k$.*
La loi de probabilité de X associe à toute valeur x_i la probabilité $p_i = P(X = x_i)$

Remarque : $\sum_{i=1}^{k} p_i = \sum_{i=1}^{k} P(X = x_i) = P(\Omega) = 1$

Exemple : On lance deux dés cubiques. On s'intéresse à la somme S des numéros sortis.

On modélise l'épreuve aléatoire à l'aide d'un tableau à double entrée :

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

Le cardinal de l'univers est 36. La somme S peut prendre les valeurs :$2, \dots, 12$.

$S = 2$ n'est réalisé que par $(1,1)$ $(S = 2) = \{(1,1)\}$

$S = 3$ est réalisé par $(1,1)$ et $(2,1)$ $(S = 3) = \{(1,2), (2,1)\}$

$p(S = 2) = \frac{1}{36}$ $p(S = 3) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \dots$

S est la variable aléatoire :$S : (a, b) \mapsto a + b$.

La loi de probabilité se S est donnée par le tableau :

s	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(S = s)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

On vérifie $\frac{1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1}{36} = 1$.

3 Espérance mathématique et variance

3.1 Definition

Définition 3.

- *Espérance mathématique de X : $E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i . P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{k} x_i . p_i$ qui correspond à la valeur moyenne de x.*
- *Variance de X : $V(X) = \sum_{i=1}^{k} (x_i - E(X))^2 . p_i$*

  $V(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 . p_i - (E(X))^2$ *(formule de Koenig)*
- *Écart-type de X : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.*

3.2 Espérance de $aX + b$ et variance de aX

Propriétés 2. *Soit X une variable aléatoire définie sur Ω et a,b des réels. On a :*
$E(aX + b) = aE(X) + b$ $\quad V(aX) = a^2 V(X)$

4 EXERCICES : Les exercices de base

1. Pierre, président d'un club de judo veut acheter 60 médailles ayant la même référence. Elles sont gravées à l'effigie d'une ou d'un champion Doullet, Rinar ou Vécosse. Il passe commande chez un grossiste qui travaille avec deux fournisseurs A et B. Le tableau suivant indique les caractéristiques du colis contenant les 60 médailles envoyées par le grossiste :

	Doullet	Rinar	Vécosse	Total
Fournisseur A	10			30
Fournisseur B	5		15	
Total		20	25	60

   Pierre reçoit le colis, et tire au hasard une médaille. Dans la suite de l'exercice, on suppose que chaque médaille a la même probabilité d'être tirée.

   (a) Compléter le tableau.

   (b) Montrer que la probabilité que cette médaille soit à l'effigie de Vécosse est égale à $\frac{5}{12}$.

   (c) Quelle est la probabilité que cette médaille soit à l'effigie de Vécosse et provienne du fournisseur B ?

   (d) Pierre constate que la médaille tirée est à l'effigie de Vécosse. Quelle est la probabilité qu'elle provienne du fournisseur B ?

2. Un sac contient 15 jetons bleus, 10 jetons rouges, 3 jetons vert et 2 jetons noirs, tous indiscernables au toucher.
   Un joueur extrait au hasard un jeton de ce sac et note sa couleur : B pour bleu, R pour rouge, V pour vert et N pour noir.
   Il marque 3 points si le jeton est rouge, 5 points si le jeton est vert, mais perd 1 point si le jeton est bleu et perd 3 points si le jeton est noir.
   Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de points (Positif ou négatif) obtenu par le joueur.
   Déterminer la loi de probabilité de la variable X.

3. On lance deux fois de suite un dé parfaitement équilibré, on note a le résultat du premier lancer, b le résultat du second lancer.
   On définit la variable aléatoire X qui, à chaque issue (ab) de cette épreuve aléatoire associe le réel $| a - b |$.

   (a) Modéliser cette épreuve aléatoire à l'aide d'un tableau à double entrée.

   (b) Déterminer l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X.

   (c) Déterminer la loi de probabilité de X

   (d) Calculer la probabilité de l'événement : «$| a - b | \leqslant 3$.

   (e) Rappeler la définition de l'espérance mathématique de X . Calculer la valeur exacte de cette espérance.

4. Le nombre d'articles fabriqués dans l'année par une entreprise est une variable aléatoire X d'espérance mathématique 1 000 et d'écart- type 20. Le coût de fabrication de chaque article est de 50 € et les frais fixes annuels de fabrication s'élèvent à 10 000 €.
   On note Y la variable aléatoire égale au coût annuel total de fabrication. Déterminer l'espérance de Y.

5 EXERCICES : Les exercices de base (corrigés)

1. (a)

	Doullet	Rinar	Vécosse	Total
Fournisseur A	10	10	10	30
Fournisseur B	5	10	15	30
Total	15	20	25	60

   (b) Le nombre total de médailles est 60. Le nombre de médailles à l'effigie de Vécosse est égale 25.
   La probabilité que cette médaille soit à l'effigie de Vécosse est égale à $\frac{25}{60} = \frac{5}{12}$

   (c) Le nombre total de médailles est toujours 60. Le nombre de médailles à l'effigie de Vécosse et provenant du fournisseur B est égale 15.
   La probabilité que cette médaille soit à l'effigie de Vécosse et provienne du fournisseur B est égale à $\frac{15}{60} = \frac{1}{4}$

   (d) Il y a 25 médailles tirées à l'effigie de Vécosse. 15 d'entre elles viennent du fournisseur B.
   La médaille tirée est à l'effigie de Vécosse, la probabilité qu'elle provienne du fournisseur B est $\frac{15}{25} = \frac{3}{5}$.

2. Tous les jetons ayant la même chance d'être tirés, on a :

Le jeton tiré est :	Bleu	Rouge	Vert	Noir
Probabilités :	$\frac{15}{30} = \frac{1}{2}$	$\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$	$\frac{5}{30} = \frac{1}{6}$	$\frac{2}{30} = \frac{1}{15}$
Nombre de points marqués :	-1	3	5	-3

   On a donc comme loi de probabilité pour la variable aléatoire X :

x_i	-3	-1	3	5
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

3. (a) On modélise l'épreuve aléatoire à l'aide d'un tableau à double entrée :

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

   (b) $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

   (c) Le dé étant non pipé toutes les issues sont équiprobables.
   La loi de probabilité de X est :

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$

(d) $P(X \leqslant 3) = P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3) = \dfrac{1}{6}+\dfrac{5}{18}+\dfrac{2}{9}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{6}$.

(e) $E(X) = \displaystyle\sum_{i=0}^{i=5} i \times P(X=i) = 0\times\dfrac{1}{6}+1\times\dfrac{5}{18}+2\times\dfrac{2}{9}+3\times\dfrac{1}{6}+4\times\dfrac{1}{9}+5\times\dfrac{1}{18}=\dfrac{35}{18}$.

4. $Y = 50X + 100000$, d'après la linéarité de l'espérance :
$E(Y) = 50E(X) + 10000 = 50 \times 100 + 10000 = 60000$