1 Norme d'un vecteur

Définition 1. *Soit $\vec{u}$ un vecteur, A et B deux points du plan tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.*
On appelle norme du vecteur $\vec{u}$, que l'on note $\|\vec{u}\|$, la longueur du segment $[AB]$: $\|\vec{u}\| = AB$

Propriétés 1.
Soit $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère orthonormé du plan.

- *Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$*
- *$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.*

Propriétés 2.

- $\|\vec{0}\| = 0$
- *Pour tout vecteur $\vec{u}$ et réel k on a : $\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$*

2 Produit scalaire

2.1 Definition

Théorème 1. *Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls du plan, on a :*

$$\frac{1}{2}\left(\| \vec{u} + \vec{v} \|^2 - \| \vec{u}^2 \| - \| \vec{v}^2 \|\right) = \| \vec{u} \| \times \| \vec{v} \| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Définition 2.
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On appelle produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on note $\vec{u}.\vec{v}$ le nombre réel défini par :
- *$\vec{u}.\vec{v} = 0$ si l'un des vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul*
- *$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\| \vec{u} + \vec{v} \|^2 - \| \vec{u}^2 \| - \| \vec{v}^2 \|\right) = \| \vec{u} \| \times \| \vec{v} \| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$ sinon.*

2.2 Expression analytique du produit scalaire dans un repère orthonormé

Théorème 2. *Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan.*
Soit $\vec{u}$ le vecteur de coordonnées (x, y) et $\vec{v}$ le vecteur de coordonnées (x', y') dans ce repère.
Alors $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$.

2.3 Propriétés du produit scalaire

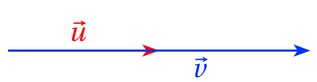
Théorème 3. *Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ du plan et tout réel α :*

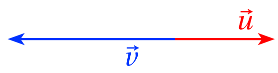
- $\vec{u}.\vec{v} \in \mathbb{R}$
- $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
- $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$
- $\vec{u}.(\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u}.\vec{v})$
- $\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$. *Ce nombre se note aussi $\vec{u}^2$.*

Remarques

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraire, $\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$





$\vec{u}.\vec{v} = \| \vec{u} \| \times \| \vec{v} \|$

$\vec{u}.\vec{v} = - \| \vec{u} \| \times \| \vec{v} \|$

Identités remarquables

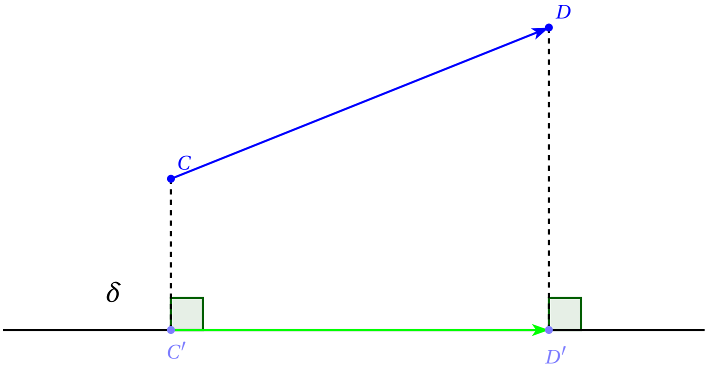
- $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2 = \| \vec{u}+\vec{v} \|^2$
- $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2 = \| \vec{u}-\vec{v} \|^2$
- $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

2.4 Vecteurs orthogonaux

Définition 3.
On dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux lorsque leur produit scalaire est nul : $\vec{u}.\vec{v} = 0$.
On note $\vec{u} \perp \vec{v}$.

2.5 Projection orthogonale

Théorème 4. *Soient A, B, C, D quatre points du plan, A et B distincts.*
On appelle C' et D' les projetés orthogonaux de C et D sur la droite (AB).
Alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$.



3 Applications du produit scalaire

3.1 Équation cartésienne d'une droite

On se place dans un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$du plan.

Définition 4. *Un vecteur normal à une droite $\mathscr{D}$ est un vecteur non nul, orthogonal à un vecteur directeur directeur de $\mathscr{D}$.*

Propriétés 3.
• *Une droite de vecteur normal* $\overrightarrow{n}(a;b)$ *admet une équation cartésienne de la forme* $ax+by+c=0$ *où* c *est un nombre réel à déterminer.*
• *Réciproquement, la droite d'équation cartésienne* $ax+by+c=0$ *admet le vecteur* $\overrightarrow{n}(a;b)$ *comme vecteur normal.*

On utilise : A étant un point de la droite et $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal de la droite $\mathscr{D}$: $M \in \mathscr{D} \iff \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}=0$.

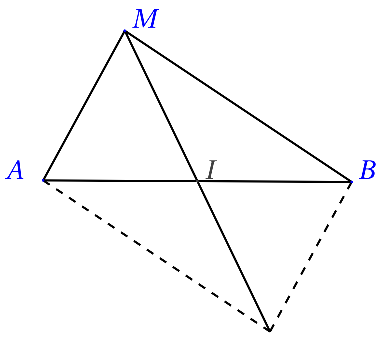
3.2 Équation d'un cercle donné par son diamètre

Théorème 5. *On utilise :*
Le cercle de diamètre $[AB]$ *est l'ensemble des points* M *tels que les vecteurs* $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$

3.3 Théorème de la médiane

Théorème 6. *A et B deux points, I le milieu de $[AB]$.*
Pour tout point M du plan on a :

- $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=MI^2-\dfrac{AB^2}{4}$
- $MA^2+MB^2=2MI^2+\dfrac{AB^2}{2}$
- $MA^2-MB^2=2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}$



3.4 Trigonométrie

Les formules d'addition

Théorème 7. *Pour tous réels a et b, on a :*
$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$
$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$
$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$
$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$

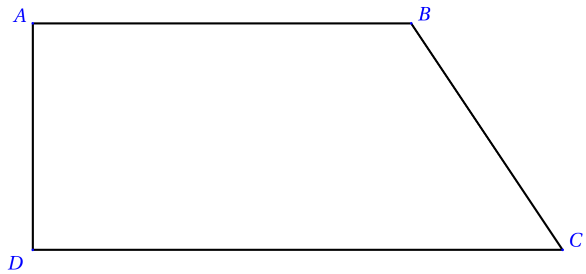
Les formules de duplication et de linéarisation

Théorème 8. *Pour tout réel a on a :*

duplication	*linéarisation*
$\cos 2a=\cos^2 a-\sin a^2=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a$	$\cos^2 a=\dfrac{1+\cos 2a}{2}$
$\sin 2a=2\sin a\cos a$	$\sin^2 a=\dfrac{1-\cos 2a}{2}$

4 Les exercices

1. $ABCD$ est un trapèze rectangle en A et D tel que :
   $AB = 5$, $AD = 3$ et $DC = 7$.

   (a) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$
   (b) Calculer $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$,
   (c) Calculer $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$,

2. Soit un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On donne les coordonnées de A, B, C :

   (a) $A(2;1)$ $B(6;-3)$ $C(-8;5)$ Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$
   (b) $A(-4;3)$ $B(2;-7)$ $C(4;5)$ Calculer $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$
   (c) $A(1;8)$ $B(-3;2)$ $C(-5;4)$ Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}$

3. Soit un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère un triangle ABC. Déterminer une équation de la hauteur issue de :

   (a) $A(2;1)$ $B(6;-3)$ $C(-8;5)$ issue de A
   (b) $A(-4;3)$ $B(2;-7)$ $C(4;5)$ issue de B
   (c) $A(1;8)$ $B(-3;2)$ $C(-5;4)$ issue de C

4. Soit un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère un triangle ABC. Déterminer une équation de la médiatrice du :

   (a) $A(2;1)$ $B(6;-3)$ $C(-8;5)$ segment [AB]
   (b) $A(-4;3)$ $B(2;-7)$ $C(4;5)$ segment [BC]
   (c) $A(1;8)$ $B(-3;2)$ $C(-5;4)$ segment [AC]

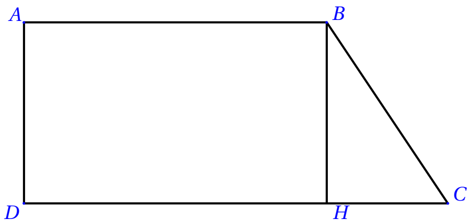
5. Soit un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}$:

   (a) $A(-2;1)$ $B(-5;3)$ $C(-1;5)$ Cercle de diamètre [AB]
   (b) $A(4;-1)$ $B(-5;6)$ $C(4;-5)$ Cercle de diamètre [AC]
   (c) $A(2;6)$ $B(3;-\sqrt{5})$ $C(4;5)$ Cercle de diamètre [BC]

6. Soit un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Déterminer une équation de la tangente au cercle du cercle $\mathscr{C}$ au point A :

   (a) $\mathscr{C} : x^2 + y^2 + 2x + 2y = 6$ et $A(1,1)$
   (b) $\mathscr{C} : x^2 + y^2 - 6x + 8y = 36$ et $A(-2,2)$
   (c) $\mathscr{C} : x^2 + y^2 - x + 3y = 6$ et $A(2,-4)$

5 Les exercices corrigés



1. $ABCD$ est un trapèze rectangle en A et D tel que :
   $AB = 5$, $AD = 3$ et $DC = 7$.
   Soit H le projeté orthogonal de B sur (DC).
   Comme $H \in [DC]$ on a :
   $DH = AB = 5$ et $HC = DC - DH = 2$.

   (a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC} = AB \times DC = 5 \times 7 = 35$
   $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = AD \times BH = 3 \times 3 = 9$
   $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{BC} = DC \times HC = 7 \times 2 = 14$
   $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = AB \times HC = 5 \times 2 = 10$

   (b) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}).(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB})$ soit :
   $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB} = -9 + 0 + 0 + 35 = 26$

   (c) $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}).(\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{HB})$ soit :
   $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{HB} = -14 + 0 + 0 + 9 = -5$

2. Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On a :

   (a) $A(2;1)$ $B(6;-3)$ $C(-8;5)$
   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -10 \\ 4 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -40 - 16 = -56$

   (b) $A(-4;3)$ $B(2;-7)$ $C(4;5)$
   $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} -6 \\ 10 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CB} = -12 + 120 = 108$

   (c) $A(1;8)$ $B(-3;2)$ $C(-5;4)$
   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB} = -8 + 12 = 4$

3. Soit une repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. La hauteur est la droite qui passe par un sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé.

   (a) Si $A(2;1)$ $B(6;-3)$ $C(-8;5)$, soit la droite Δ, la hauteur issue de A.
   $M(x,y) \in \Delta \iff \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = 0$.
   $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -14 \\ 8 \end{pmatrix}$.
   On a donc $-14(x-2) + 8(y-1) = 0$ soit $-14x + 28 + 8y - 8 = 0$ et finalement $7x - 4y - 10 = 0$.

   (b) $A(-4;3)$ $B(2;-7)$ $C(4;5)$ hauteur issue B
   On procède de la même façon et on trouve pour $\Delta : 4x + y - 1 = 0$.

   (c) $A(1;8)$ $B(-3;2)$ $C(-5;4)$ hauteur issue de C
   On procède de la même façon et on trouve pour $\Delta : 2x + 3y - 2 = 0$.

4. Soit une repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. La médiatrice est la droite qui passe par le milieu du segment et qui est perpendiculaire à la droite support du segment.

   (a) $A(2;1)$ $B(6;-3)$ $C(-8;5)$, soit la droite Δ, la médiatrice du segment $[AB]$.
   Soit C' le milieu de $[AB]$, on a $C'(4;-1)$. $M(x,y)\in\Delta \iff \overrightarrow{C'M}.\overrightarrow{AB}=0$.
   $\overrightarrow{C'M}\begin{pmatrix} x-4 \\ y+1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$.
   On a donc $4(x-4)-4(y+1)=0$ soit $4x-16-4y-4=0$ et finalement $x-y-5=0$.

   (b) $A(-4;3)$ $B(2;-7)$ $C(4;5)$ médiatrice du segment [BC]
   On procède de la même façon et on trouve pour Δ : $x+6y+3=0$.

   (c) $A(1;8)$ $B(-3;2)$ $C(-5;4)$ médiatrice du segment [AC]
   On procède de la même façon et on trouve pour Δ : $3x+2y-6=0$.

5. Soit une repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. Tout triangle rectangle est inscrit dans un cercle qui a son hypoténuse comme diamètre.

   (a) $A(-2;1)$ $B(-5;3)$.Soit $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$.
   $M(x,y)\in\mathscr{C} \iff \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$.
   $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x+5 \\ y-3 \end{pmatrix}$.
   On a donc $(x+2)(x+5)+(y-1)(y-3)=0$ soit $x^2+y^2+7x-4y+13=0$.

   (b) $A(4;-1)$ $B(-5;6)$ $C(4;-5)$ Cercle de diamètre [AC]
   On procède de la même façon et on trouve pour $\mathscr{C}$: $x^2+y^2-8x+6y+21=0$.

   (c) $A(2;6)$ $B(3;-\sqrt{5})$ $C(4;5)$ Cercle de diamètre [BC]
   On procède de la même façon et on trouve pour $\mathscr{C}$: $x^2+y^2-7x+(\sqrt{5}-5)y+12-5\sqrt{5}=0$.

6. Soit une repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.
   La tangente à un cercle en un point est la droite perpendiculaire au rayon en ce point.

   (a) $\mathscr{C} : x^2+y^2+2x+2y=6$ et $A(1,1)$
   Le cercle $\mathscr{C}$ peut s'écrire $(x+1)^2+(y+1)^2=4$. c'est donc le cercle de centreΩ avec $\Omega(-1;-1)$ et de rayon 2.
   Le point A appartient bien au cercle car $1^2+1^2+2+2=6$.
   Soit Δla tangente Δ au cercle au point d'abscisse A.
   $M(x,y)\in\Delta \iff \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{\Omega A}=0$.
   $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\Omega A}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$.
   On a donc $-2(x-1)-2(y-1)=0$ soit $2x+2y-4=0$ soit $x+y-2=0$.

   (b) $\mathscr{C} : x^2+y^2-6x+8y=36$ et $A(-2,2)$ On procède de la même façon et on trouve pour Δ : $5x-6y+22=0$.

(c) $\mathscr{C}: x^2+y^2-x+3y=6$ et $A(2,-4)$ On procède de la même façon et on trouve pour Δ : $3x-5y-26=0$.