# 1 Equation du second degré $ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$

## 1.1 Trinôme : Définition

**Définition 1.** *Un polynôme du second degré est une fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$, où $a, b, c$ sont des réels avec $a \neq 0$. On dit aussi trinôme.*

**Exemples :** $f : x \mapsto 2x^2 - 5x + 7$ est un polynôme du second degré, c' est un trinôme.
$g : x \mapsto 5x^3 - 2x + 4$ est un polynôme du troisième degré, ce n'est pas est un trinôme.

## 1.2 Forme canonique

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \quad (\text{ car } a \neq 0) \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) \end{aligned}$$

$a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$ est la forme canonique du trinôme $ax^2 + bx + c$

## 1.3 Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$

**Définition 2.** *On appelle discriminant du polynôme $ax^2 + bx + c$ le réel $\Delta$ défini par $\Delta = b^2 - 4ac$.*

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\iff a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = 0 \\ &\iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ &\iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \end{aligned}$$

Discussion
- si $\Delta < 0$ l'équation n'a pas de solution réelle.
- si $\Delta = 0$ l'équation a une unique solution $x = -\frac{b}{2a}$.
- si $\Delta > 0$ l'équation a deux solutions réelles : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

**Définition 3.** *Toute solution de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$, est appelée racine du trinôme $ax^2 + bx + c$.*

## 1.4 Factorisation

On se sert de la forme canonique :$ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$

- si $\Delta < 0$ Il n'y a pas de factorisation sous la forme d'un produit de polynômes du $1^{er}$ degré.
- si $\Delta = 0$ $ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = a(x - x_0)^2$ où $x_0$ est la racine du polynôme.
- si $\Delta > 0$ $ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \dfrac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = a\left(x - \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$
  donc $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ où $x_1$ et $x_2$ sont les deux racines du trinôme.

### 1.5 Signe du trinôme

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$

- si $\Delta > 0$ $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec $x_1 < x_2$, où $x_1$ et $x_2$ sont les deux racines de $f(x)$.
  On a le tableau de signes suivant :

| $x$ | $-\infty$ | $x_1$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x - x_1$ | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| $x - x_2$ | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $(x - x_1)(x - x_2)$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | du signe de a | 0 | du signe contraire de a | 0 | du signe de a | |

On retiendra : $f(x)$ est du signe de $a$ sauf entre les racines.

- si $\Delta \leqslant 0$ $f(x) = a\left(\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right)$ or $\left(\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right) \geqslant 0$ donc $f(x)$ est du signe de $a$.

**Théorème 1.** *Le trinôme $ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$, est du signe de a sauf entre les racines, si elles existent.*

## 2 Somme et produit des racines

**Théorème 2.** *Lorsque le polynôme du second degré $ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$ admet deux racines, leur somme S et leur produit P sont donnés par $S = -\dfrac{b}{a}$ et $P = \dfrac{c}{a}$*

**Applications**

1. Résolution d'une équation du second degré dont on connaît déjà une solution.
2. Si deux nombres ont pour somme $S$ et produit $P$ alors ils sont solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$.

## 3 Étude des fonctions polynômes du second degré

### 3.1 Représentation graphique

Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$ une fonction polynôme du second degré.

- Sous forme canonique, $f(x)$ peut s'écrire de la forme $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.
  Si $a > 0$ $f(x) \geqslant \beta$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $\beta$ est le minimum de $f$ atteint pour $x = \alpha$.
  Si $a < 0$ $f(x) \leqslant \beta$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $\beta$ est le maximum de $f$ atteint pour $x = \alpha$.

- Les variations de $f$ sont alors :

Si $a > 0$

| $x$ | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $ax^2+bx+c$ | $\searrow$ | $\beta$ | $\nearrow$ |

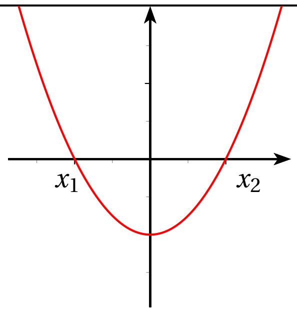
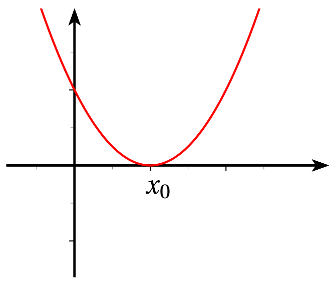
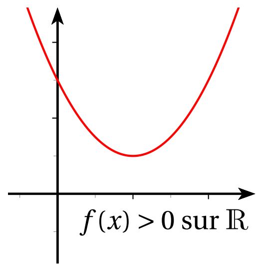
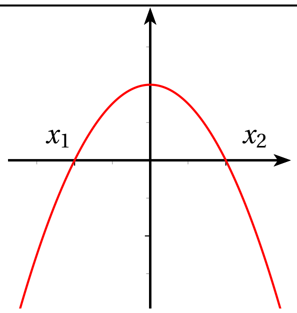
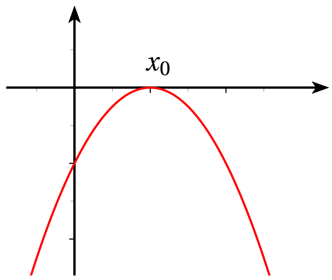
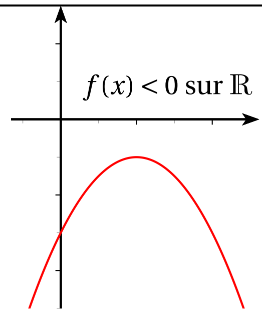
Si $a < 0$

| $x$ | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $ax^2+bx+c$ | $\nearrow$ | $\beta$ | $\searrow$ |

**Propriétés 1.** *La représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré dans un repère orthogonal* $(O, \vec{i}, \vec{j})$ *est une parabole.*

### 3.2 Interprétation graphique des résultats sur le second degré

Soit $f : x \mapsto ax^2+bx+c, \quad a \neq 0$, une fonction trinôme.
Soit $\Delta = b^2-4ac$ son discriminant.

| | $\Delta > 0$<br>$x_1$ et $x_2$ racines de $f(x)$ | $\Delta = 0$<br>$f(x)$ n'a qu'une racine $x_0$ | $\Delta < 0$<br>$f(x)$ de signe constant |
|---|---|---|---|
| **a >0** |  |  |  |
| **a < 0** |  |  |  |

## 4 EXERCICES : Les exercices de base

1. Résoudre :
   a. $(3x-2)^2 = 7$ b. $(5x-3)^2 = 4(x+2)^2$ c. $x^2-5x+6=0$ d. $2x^2+5x-3=0$
   e. $3x^2-2x+1=0$ f. $x^2-5x+6 \leqslant 0$ g. $2x^2+5x-3>0$ h. $-x^2+3x-1 \geqslant 0$
   i. $3x^2-2x+1>0$ j. $(3x-2)(5x+3)<0$ k. $\dfrac{3x-2}{5x+3} \leqslant 0$

2. Factoriser :
   a. $5x^2-7x+2$ b. $-x^2+2x+1$

3. Résoudre :
   a. $\dfrac{(4x-1)(2x+3)^2}{x(7x+2)}<0$ b. $\dfrac{3x-1}{x+2} \leqslant \dfrac{5x+2}{-x+7}$ c. $\dfrac{3x-2}{5x+3}<1$

4. Trouver une racine simple et en déduire l'autre racine :
   a. $x^2+3x-4$ b. $x^2-7x+6$ c. $x^2-2x-3$

5. Vérifier que $\dfrac{1}{2}$ est racine. Quelle est l'autre racine :
   a. $2x^2-9x+4=0$ b. $6x^2+x-2=0$

6. Résoudre :
   a. $x^4-5x^2+6=0$ b. $x^5-x^3-12x=0$

## 5 EXERCICES : Les exercices de base ( corrigés)

1. *a.* $(3x-2)^2 = 7 \iff 3x-2 = \sqrt{7}$ ou $3x-2 = -\sqrt{7}$

$$\iff x = \frac{2+\sqrt{7}}{3} \text{ ou } x = \frac{2-\sqrt{7}}{3}$$

*b.* $(5x-3)^2 = 4(x+2)^2 \iff 5x-3 = 2(x+2)$ ou $5x-3 = -2(x+2)$

$$\iff 3x = 7 \text{ ou } 7x = -1$$

$$\iff x = \frac{7}{3} \text{ ou } x = -\frac{1}{7}$$

c. $x^2 - 5x + 6 = 0 \iff x = 2$ ou $x = 3$

d. $2x^2 + 5x - 3 = 0 \iff S = \left\{\frac{1}{2}; -3\right\}$

e. $3x^2 - 2x + 1 = 0$ il n'y a pas de solution

f. $x^2 - 5x + 6 \leqslant 0 \iff x \in [2,3]$

g. $2x^2 + 5x - 3 > 0 \iff x \in ]-\infty, -3[ \cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$

h. $-x^2 + 3x - 1 \geqslant 0 \iff S = \left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$

i. $3x^2 - 2x + 1 > 0$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$

j. $(3x-2)(5x+3) < 0 \iff x \in \left]-\frac{3}{5}, \frac{2}{3}\right[$

k. $\dfrac{3x-2}{5x+3} \leqslant 0 \iff x \in \left]-\frac{3}{5}, \frac{2}{3}\right]$

2. a. $5x^2 - 7x + 2$ a pour discriminant 9 et pour racines $\frac{7-3}{10}$ et $\frac{7+3}{10}$, soit $\frac{2}{5}$ et 1.

donc $5x^2 - 7x + 2 = 5\left(x - \frac{2}{5}\right)(x-1) = (5x-2)(x-1)$

b. $-x^2 + 2x + 1 = -(x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2})$

3. a. $\dfrac{(4x-1)(2x+3)^2}{x(7x+2)} < 0$

On fait un tableau de signe :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{3}{2}$ | | $-\frac{2}{7}$ | | $0$ | | $\frac{1}{4}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $(2x+3)^2$ | | $+$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $\dfrac{4x-1}{7x+2}$ | | $+$ | | $+$ | ‖ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $\dfrac{(4x-1)(2x+3)^2}{x(7x+2)}$ | | $-$ | $0$ | $-$ | ‖ | $+$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Soit :

$$S = \left]-\infty; -\frac{3}{2}\right[ \cup \left]-\frac{3}{2}, -\frac{2}{7}\right[ \cup \left]0; \frac{1}{4}\right[$$

b. $\dfrac{3x-1}{x+2} \leqslant \dfrac{5x+2}{-x+7}$ on obtient $\dfrac{3x-1}{x+2} - \dfrac{5x+2}{-x+7} \leqslant 0$

Soit après réduction au même dénominateur : $\dfrac{-8x^2+10x-11}{(x+2)(-x+7)} \leqslant 0$.

Le discriminant du numérateur est nul donc $-8x^2+10x-11$ est toujours négatif .

On obtient : $S = ]-2; 7[$.

c. $\dfrac{3x-2}{5x+3} < 1 \iff S = \left]-\infty; -\frac{5}{2}; \right[ \cup \left]-\frac{3}{5}; +\infty\right[$

4. a. $x^2+3x-4$. 1 est racine car $1^2+3\times 1-4=0$.
   Le produit des racines est -4 donc la seconde racine est - 4.
   b. $x^2-7x+6$ 1 est racine car $1^2-7\times 1+6=0$.
   Le produit des racines est 6 donc la seconde racine est 6.
   c. $x^2-2x-3=0$ -1 est racine .
   Le produit des racines est -3 donc la seconde racine est 3.

5. a. $2x^2-9x+4=0$
   $2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - 9\times\dfrac{1}{2}+4 = \dfrac{1}{2}-9+4=0$ donc $\dfrac{1}{2}$ est racine.

   Le produit des racines est $\dfrac{4}{2}$ soit 2, donc l'autre racine est $2 : \dfrac{1}{2} = 4$.

   b. $6x^2+x-2=0$ l'autre racine est $-\dfrac{2}{3}$

6. a. On pose $X = x^2$.
   $x^4-5x^2+6=0 \iff X^2-5X+6=0$
   $x^4-5x^2+6=0 \iff X=2$ ou $X=3$
   $x^4-5x^2+6=0 \iff x^2=2$ ou $x^2=3$.
   Soit S=$\{-\sqrt{3}; -\sqrt{2}; \sqrt{2}; \sqrt{3}\}$

   b. On pose $X = x^2$.
   $x^5-x^3-12x=0 \iff x(x^4-x^2-12)=0$
   $x^5-x^3-12x=0 \iff x=0$ ou $X^2-X-12=0$
   $x^5-x^3-12x=0 \iff x=0$ ou $X=4$ ou $X=-3$
   $x^4-5x^2+6=0 \iff x=0$ ou $x^2=4$ ou $x^2=-3$.
   Soit S=$\{-2; 0; 2\}$