1 Notion de suite

Définition 1. *Une suite numérique est une fonction qui, à tout entier naturel n associe un réel.*

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u_n \end{array}$$

Une suite peut être définie seulement à partir du rang n_0.
On note $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ la suite de terme général u_n. Le terme initial de cette suite est u_{n_0}.

1.1 Suite définie par une formule explicite

Définition 2. *Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle $[a;+\infty[$.*
On définit une suite associée à la fonction f en posant pour tout entier naturel n, $u_n = f(n)$
u_n est l'image de l'entier n par la fonction f.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{x+1}$.

Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = f(n) = \frac{n}{n+1}$
Le terme initial est $u_0 = \frac{0}{0+1} = 0$.
Le terme u_1 vaut $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$.
Le terme u_2 vaut $\frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$.
....
Un algorithme permettant d'afficher les termes de u_0 à u_{10} est :

```
Pour i variant de 0 à 10
u prend la valeur i/(i+1)
afficher u
Fin Pour
```

On a par exemple, $u_{10} = \frac{10}{10+1}$ soit $u_{10} = \frac{10}{11}$

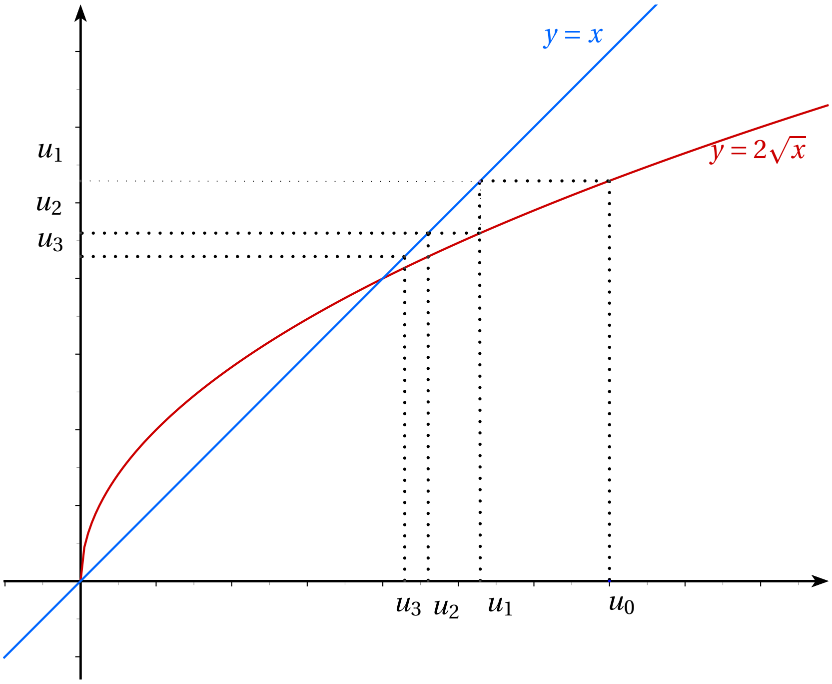
1.2 Suite définie par une relation de récurrence

Définition 3. *Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I (avec $f(I) \subset I$)*
et a un réel de I.
On définit la suite (u_n) par :
• *le terme initial $u_0 = a$*
• *une relation permettant de calculer chaque terme de la suite à partir du précédent, appelée relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$;*

Exemple : Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} \end{cases}$

Ici $f(x) = 2\sqrt{x}$
La représentation graphique des premiers termes de la suite (u_n) est donnée ci-contre :
Un algorithme permettant d'afficher u_{50} est :

Initialisation :	Affecter à u la valeur 7.
Traitement :	**Pour** i variant de 1 à 50
	u prend la valeur $2\sqrt{u}$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher u



2 Les suites arithmétiques

2.1 Définition

Définition 4. *On dit qu'une suite (u_n) est arithmétique s'il existe un réel r tel que, pour tout entier naturel n, on a :*

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Le réel r est appelé raison de la suite arithmétique (u_n).

Exemple : La suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = u_n - \frac{1}{4}$ est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{4}$ et de premier terme $u_0 = 3$. l'algorithme suivant permet de calculer le terme u_n.

Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de n
Initialisation :	Affecter à u la valeur 3.
Traitement :	**Pour** i variant de 1 à n
	u prend la valeur $u - \frac{1}{4}$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher u

2.2 Expression de u_n en fonction de n

Théorème 1. *Soit (u_n) est une suite arithmétique de raison r. Alors :*
Pour tout entier naturel n, on a : $u_n = u_0 + nr$
Pour tout entier naturel n et pour tout entier naturel p tel que $p < n$, $u_n = u_p + (n - p)r$

Théorème 2. *Soit* (u_n) *une suite définie, pour tout entier naturel* n*, par :*

$$u_n = an + b$$

Alors (u_n) *est la suite arithmétique de terme initial* $u_0 = b$ *et de raison* a*.*

2.3 Somme des n premiers entiers naturels

Théorème 3. *Pour tout entier naturel* n *non nul :* $1 + 2 + ... + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Un algorithme donnant la somme S_n des $n+1$ premiers termes de la suite arithmétique de raison r et de terme initial u_0 est :

Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de n
Initialisation :	Affecter à u la valeur u_0.
	Affecter à S la valeur 0.
Traitement :	**Pour** i variant de 1 à $n+1$
	S prend la valeur $S+u$
	u prend la valeur $u+r$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher S

3 Les suites géométriques

3.1 Définition

Définition 5. *On dit qu'une suite* (u_n) *est géométrique s'il existe un réel* q *tel que, pour tout entier naturel* n*, on a :*

$$u_{n+1} = q u_n$$

Le réel q *est appelé raison de la suite géométrique* (u_n)*.*

3.2 Expression de u_n en fonction de n

Théorème 4. *Soit* (u_n) *une suite géométrique de raison* q*. Alors :*
Pour tout entier naturel n*,* $u_n = u_0 q^n$
Pour tout entier naturel n *et pour tout entier naturel* p *tel que* $p < n$*,* $u_n = u_p q^{n-p}$

Théorème 5. *Soit* (u_n) *une suite définie, pour tout entier naturel* n*, par :*

$$u_n = ba^n$$

Alors (u_n) *est la suite géométrique de terme initial* $u_0 = b$ *et de raison* a*.*

3.3 Somme des $n+1$ premières puissances d'un réel q

Calcul de $S_n = 1+q+q^2+.....+q^{n-1}+q^n = \sum_{k=0}^{n} q^k$ où q est un réel.

$$\begin{array}{ccccccccccccc} S_n & = & 1 & + & q & + & .... & .... & + & q^{n-1} & + & q^n \\ qS_n & = & q & + & q^2 & + & .... & ... & + & q^n & + & q^{n+1} \\ \hline (1-q)S_n & = & 1-q^{(n+1)} & & & & & & & & & \end{array}$$

donc :

- si $q=1$ alors $S_n = 1+1+1+...+1+1 = n+1$ car il y a $n+1$ fois le nombre 1.
- Si $q \neq 1$ alors

$$\boxed{S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

4 Suite monotone, bornée

4.1 Monotonie

Définition 6.
On dit que la suite (u_n) est ***croissante*** *(resp. strictement croissante) à partir du rang n_0 si, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $\quad u_{n+1} \geqslant u_n$ (resp $u_{n+1} > u_n$).*
On dit que la suite (u_n) est ***décroissante*** *(resp. strictement décroissante) à partir du rang n_0 si, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $\quad u_{n+1} \leqslant u_n$ (resp $u_{n+1} < u_n$).*
Une suite qui est soit croissante, soit décroissante, est dite ***monotone****.*
On dit que la suite (u_n) est ***constante*** *à partir du rang n_0 si, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $\quad u_{n+1} = u_n$.*

Remarque : Pour des suites à termes strictement positifs, si la formule définissant la suite comporte des produits et des quotients, il est souvent facile de calculer le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et de le comparer à 1.

4.2 Majorants, minorants

Définition 7.
On dit que la suite (u_n) est ***majorée*** *s'il existe un réel M tel que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant M$.*
On dit que la suite (u_n) est ***minorée*** *s'il existe un réel m tel que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant m$.*
Une suite à la fois majorée et minorée est dite ***bornée****.*

5 Cas d'une suite arithmétique ou géométrique

5.1 Suites arithmétique

Propriétés 1. *Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.*

- *La suite (u_n) est strictement croissante si et seulement si $r > 0$.*
- *La suite (u_n) est strictement décroissante si et seulement si $r < 0$.*
- *La suite (u_n) est constante si et seulement si $r = 0$*

5.2 Suites géométrique

Propriétés 2. *Soit* (u_n) *une suite géométrique de raison* q.

- *Si* $q > 1$, *alors la suite* (q^n) *est strictement croissante.*
- *Si* $0 < q < 1$, *alors la suite* (q^n) *est strictement dé croissante.*
- *Si* $q = 1$, *alors la suite* (q^n) *est constante.*

Remarque : Pour déterminer le sens de variations d'une suite géométrique définie par $u_n = u_o q^n$, on devra tenir compte du signe de u_0.

6 Exercices : Les exercices de base

1. a. Pour chacune des suites suivantes, calculer u_6 :

   b. (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2(n+3)+6$
   c. (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1 \end{cases}$
   d. (u_n) définie par : $\begin{cases} u_3 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n - n \end{cases}$
2. a. Soit une suite définie par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 3$. Donner u_n en fonction de u_{n-1} pour $n \geqslant 1$.
   b. Soit une suite définie par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_n + n$. Donner u_n en fonction de u_{n-2} pour $n \geqslant 2$.
3. Soit $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ pour $n \geqslant 1$..
   a. Calculer u_1, u_2, u_3.
   b. Déterminer $u_{n+1} - u_n$.
   c. En déduire que $u_{n+1} \geqslant u_n$
4. Soit (u_n) une suite arithmétique déterminer son premier terme u_0 et sa raison sachant que :
   a. $u_3 = 11$ et $u_8 = 26$
   b. $u_8 = 4$ et $u_{12} = -6$
   c. $u_4 = 2$ et $u_5 + u_6 = 13$
5. Pour chacune des suites suivantes dire si elle est arithmétique, géométrique ou ni l'un ni l'autre :
   a. $u_n = n$ b. $u_{n+1} = 5u_n$ et $u_0 = 3$ c. $u_n = n^2$

   d. $u_n = 2^n$ e. $u_{n+1} = \dfrac{1}{2^n} + 1$ f. $u_n = u_{n-1} - 5$ et $u_0 = -1$

   g. $u_{n+1} + 2 = u_n - 3$ et $u_0 = 7$ h. $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ et $u_0 = 2$ i. $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n}$ et $u_0 = 2$

6. Pour chacune des suites suivantes exprimer u_n en fonction de n :

   a. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n$ et $u_0 = 4$
   b. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n$ et $u_0 = 8$
   c. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 5u_n$ et $u_4 = 7$
   d. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - 5$ et $u_5 = 7$

7. Calculer les sommes suivantes $S = \sum_{i=0}^{i=10} u_i$ pour les suites définies par :

   a. $\forall i \in \mathbb{N},\ u_{i+1} = u_i + 3$ et $u_0 = 4$
   b. $\forall i \in \mathbb{N},\ u_{i+1} = 2u_i$ et $u_0 = 1$

7 Exercices : Les exercices de base (corrigés)

1. a. $u_6 = 2(6+3)+6 = 18+6 = 24$
   b. $u_0 = 4 \quad u_1 = \dfrac{1}{2}\times 4+1 = 3 \quad u_2 = 2,5 \quad u_3 = 2,25 \quad u_4 = 2,125 \quad u_5 = 2,0625 \quad u_6 = 2,0313$
   c. $u_6 = 71$.
2. a. $u_{n+1} = 2u_n + 3$ soit $u_n = 2u_{n-1}+3$
   b. $u_{n+2} = 3u_n + n$ soit $u_n = 3u_{n-2} + n - 2$.
3. a. Soit $u_n = 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{n}$.
   $u_1 = 1 \quad u_2 = 1+\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2} \quad u_3 = 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3} = \dfrac{11}{6}$.
   b. $u_{n+1} = 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}$ donc $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{n+1}$ et on a :
   $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1}$
   c. $n \in \mathbb{N}$ donc $\dfrac{1}{n+1} \geqslant 0$ et par conséquent $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ et $u_{n+1} \geqslant u_n$.
4. a. $u_3 = u_0 + 3r = 11 \quad u_8 = u_0 + 8r = 26$.
   On résout le système $\begin{cases} u_0 + 3r = 11 \\ u_0 + 8r = 26 \end{cases}$ On obtient $u_0 = 2$ et $r = 3$.
   b. $u_0 = 24$ et $r = -\dfrac{5}{2}$
   c. $u_4 = u_0 + 4r = 2$ et $u_5 + u_6 = u_0 + 5r + u_0 + 6r = 2u_0 + 11r = 13$.
   Soit $u_0 = -10$ et $r = 3$
5. a. $u_n = 1\times n + 0$ donc de la forme $u_n = an + b$.
   (u_n) est une suite arithmétique de raison 1 et de terme initial 0.
   b. (u_n) est une suite géométrique de raison 5 et de terme initial 3.
   c. $u_0 = 0 \quad u_1 = 1 \quad u_2 = 4$.
   $u_1 - u_0 \neq u_2 - 1$ et $\dfrac{u_1}{u_0} \neq \dfrac{u_2}{u_1}$ donc
   (u_n) n'est ni une suite arithmétique ni une suite géométrique.
   d. $u_n = 1\times 2^n$ donc de la forme $u_n = ba^n$.
   (u_n) est une suite géométrique de raison 2 et de terme initial 1.
   e. $u_1 = 2 \quad u_2 = \dfrac{3}{2} \quad u_3 = \dfrac{5}{4}$.
   $u_1 - u_0 \neq u_2 - 1$ et $\dfrac{u_1}{u_0} \neq \dfrac{u_2}{u_1}$ donc
   (u_n) n'est ni une suite arithmétique ni une suite géométrique.
   f. (u_n) est une suite arithmétique de raison -5 et de terme initial -1.
   g. $u_{n+1} + 2 = u_n - 3$ s'écrit $u_{n+1} = u_n - 5$ donc
   (u_n) est une suite arithmétique de raison -5 et de terme initial 7.
   h. $u_0 = 2 \quad u_1 = \sqrt{2} \quad u_2 = \sqrt{\sqrt{2}}$.
   $u_1 - u_0 \neq u_2 - 1$ et $\dfrac{u_1}{u_0} \neq \dfrac{u_2}{u_1}$ donc
   (u_n) n'est ni une suite arithmétique ni une suite géométrique.
   i. $u_0 = 2 \quad u_1 = \dfrac{1}{2} \quad u_2 = 2$.
   $u_1 - u_0 \neq u_2 - 1$ et $\dfrac{u_1}{u_0} \neq \dfrac{u_2}{u_1}$ donc
   (u_n) n'est ni une suite arithmétique ni une suite géométrique.

6. a. (u_n) est une suite géométrique de raison 3 et de terme initial $u_0 = 4$.
   Soit $u_n = u_0 \times q^n$ soit ici $u_n = 4 \times 3^n$.
   b. (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$ et de terme initial $u_0 = 8$.
   Soit $u_n = u_0 \times q^n$ soit ici $u_n = 8 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$.
   c. (u_n) est une suite géométrique de raison 5 et de terme initial $u_4 = 7$.
   Soit $u_n = u_4 \times q^{n-4}$ soit ici $u_n = 7 \times 5^{n-4}$.
   d. (u_n) est une suite arithmétique de raison -5 et de terme initial $u_5 = 7$.
   Soit $u_n = u_5 + n - 5 \times r$ soit ici $u_n = 7 - 5(n-5) = -5n + 32$.

7. a. (u_n) est une suite arithmétique de raison 3 et de terme initial $u_0 = 4$.
   $u_0 = 4 \qquad u_{10} = 4 + 30 = 34$. Soit $S = \left(\frac{4+34}{2}\right) \times 11 = 209$.
   b. (u_n) est une suite géométrique de raison 2 et de terme initial $u_0 = 1$.
   $u_0 = 1$. Soit $S = \frac{1-2^{11}}{1-2} = 2047$.