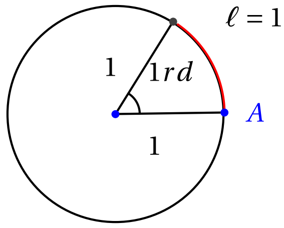
1 Le radian : unité de mesure d'angle

Définition 1. *Soit C un cercle de centre O et de rayon 1.*
Un radian est la mesure d'un angle au centre qui intercepte un arc de longueur 1 du cercle.
La mesure en radians d'un angle au centre est donc la longueur de l'arc que l'angle intercepte sur le cercle C.

Propriétés 1. *La mesure d'un angle en radians est proportionnelle à sa mesure en degrés.*

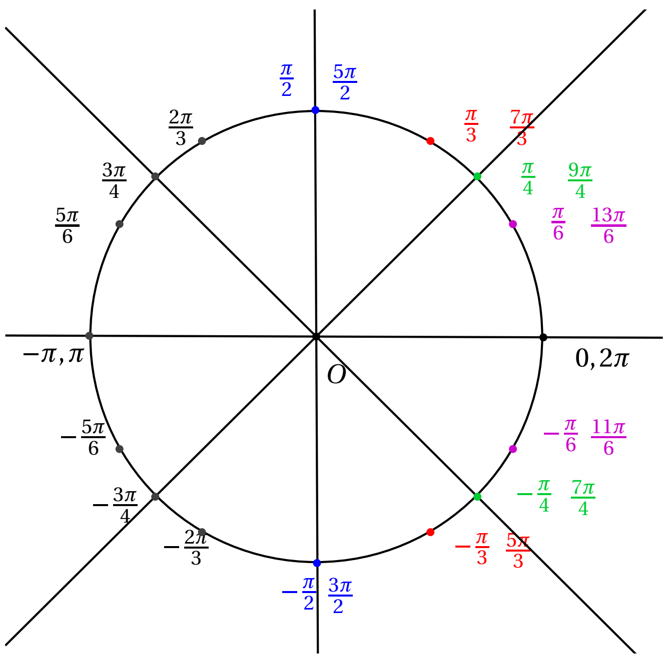
Tableau de proportionnalité :

mesure de l'angle en degré	360°	180°	90°	60°	45°	30°	...	$x°$
longueur de l'arc du cercle trigonométrique	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{x \times \pi}{180}$
mesure de l'angle en radian	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{x \times \pi}{180}$

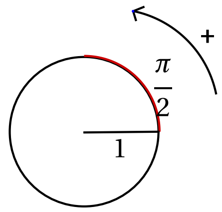


2 Le cercle trigonométrique

On oriente les cercles du plan en choisissant un sens positif (ou direct) : le sens positif est le sens contraire des aiguilles d'une montre.



Définition 2.
Un cercle trigonométrique est un cercle dont le rayon est égal à 1 et qui est orienté dans le sens direct (on dit aussi le sens positif).



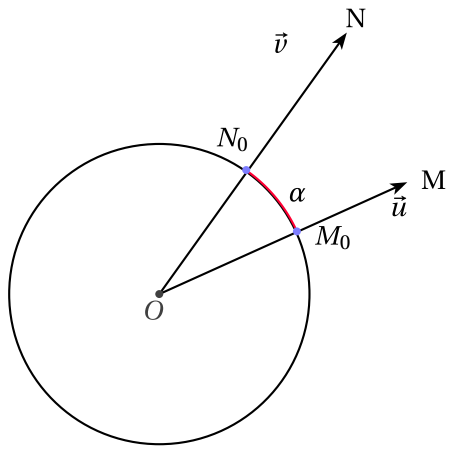
La longueur du cercle trigonométrique est 2π
La longueur du quart de cercle trigonométrique est $\frac{\pi}{2}$

3 Mesures d'un angle orienté de deux vecteurs

3.1 Mesures

Définition 3.
Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. L'angle orienté des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le couple $(\vec{u}, \vec{v})$.

Pour mesurer cet angle on se place dans un cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ de centre O.

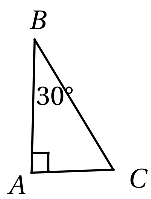


Il existe deux points M et N uniques tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$.
On appelle M_0 et N_0 les intersections du cercle et des demi-droites $[OM)$ et $[ON)$.
Une mesure α de $(\vec{u}, \vec{v})$ est la longueur d'un trajet de M_0 à N_0 sur le cercle $\mathscr{C}$, affecté d'un signe + si le sens du parcours est le sens direct, d'un signe - si le sens du parcours est le sens indirect.

Propriétés 2. *Si α est une mesure de l'angle orienté $\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$, alors l'ensemble des mesures de $\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$ est l'ensemble des nombres $\alpha + k2\pi \quad, k \in \mathbb{Z}$*

On note $\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = \alpha + k2\pi$ les mesures de l'angle orienté $\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$

Ainsi dans la figure ci-contre :
$\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}\right) = \frac{\pi}{3} + k2\pi$; $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$
$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \quad, k \in \mathbb{Z}$



Remarque :
$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = -\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right)$

3.2 Mesure principale

Définition 4. *$\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant deux vecteurs non nuls du plan, il existe une unique mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ appartenant à l'intervalle $]-\pi, \pi]$. Cette mesure est appelée mesure principale de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$.*

Cette mesure correspond au trajet le plus court de M_0 à N_0 sur le cercle.

3.3 Vecteurs colinéaires

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont colinéaires si et seulement si $(\vec{u}, \vec{v}) = 0 + k2\pi$ ou $\pi + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
ABC alignés si et seulement si $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
$(AB)//(CD)$ si et seulement si $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

3.4 Vecteurs orthogonaux

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont orthogonaux si et seulement si $(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

4 Mesure d'un angle géométrique

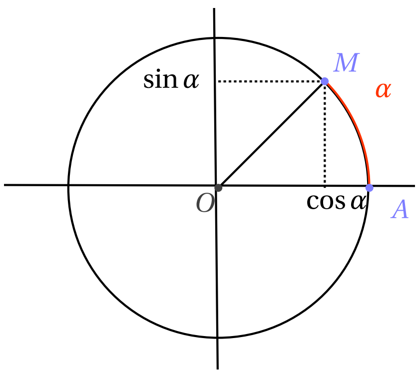
4.1 Définition

Définition 5. *Soit A, P et Q trois points distincts deux à deux. Si α est la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ})$, alors la mesure en radians de l'angle géométrique PAQ est $|\alpha|$.*
La mesure en radians d'un angle géométrique est comprise entre 0 et π.

5 Cosinus et Sinus

5.1 Définition

Définition 6. *Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le cercle trigonométrique de centre O.*
A tout réel α on associe le point M sur le cercle tel que α soit une mesure de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.
$\cos\alpha$ est l'abscisse de M
$\sin\alpha$ est l'ordonnée de M
On note $M(\cos\alpha, \sin\alpha)$



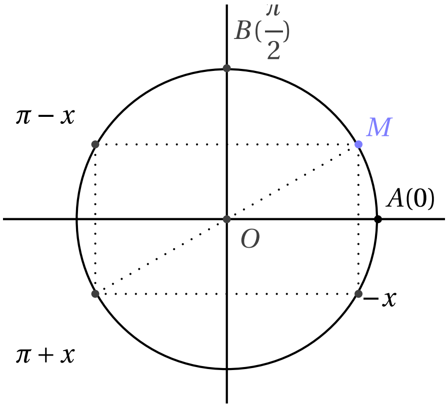
Propriétés 3. $\forall\alpha \in \mathbb{R}, -1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$
$\alpha \in \mathbb{R}, -1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1$
$\alpha \in \mathbb{R}, \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
$\alpha \in \mathbb{R}, \cos(\alpha + k2\pi) = \cos\alpha$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}, \sin(\alpha + k2\pi) = \sin\alpha \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$

Définition 7. *Le cosinus et le sinus d'un angle orienté sont respectivement le cosinus et le sinus d'une mesure quelconque de cet angle.*

5.2 Les valeurs remarquables

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

5.3 Configuration du rectangle



$\cos(\pi - x) = -\cos x$ $\cos(\pi + x) = -\cos x$ $\cos(-x) = \cos x$

$\sin(\pi - x) = \sin x$ $\sin(\pi + x) = -\sin x$ $\sin(-x) = -\sin x$

5.4 Configuration du triangle

M et M' sont symétriques par rapport à la 1^{ere} bissectrice d'équation $y = x$.

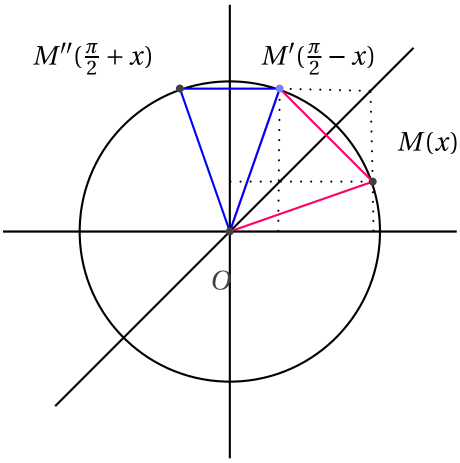
Donc $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$.

M' et M'' sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Donc $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$.

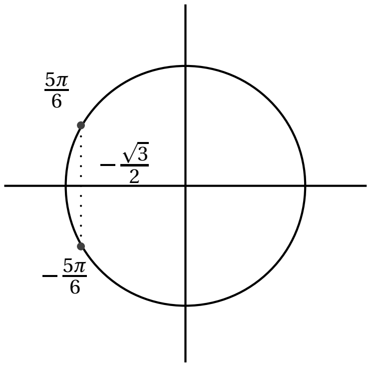


5.5 Équations

Exemples :

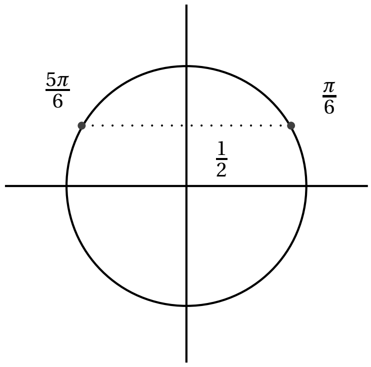
1. Résoudre $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. , k \in \mathbb{Z}$$



2. Résoudre $\sin 3x = \dfrac{1}{2}$

$$\sin 3x = \frac{1}{2}$$
$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 3x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \\ \text{ou} \\ 3x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. , k \in \mathbb{Z}$$
$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = \dfrac{5\pi}{18} + k\dfrac{2\pi}{3} \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{\pi}{18} + k\dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right. , k \in \mathbb{Z}$$



Les solutions dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ sont :
$$S_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}, \frac{17\pi}{18}, \frac{25\pi}{18}, \frac{29\pi}{18}\right\}$$

Celles dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$ sont :
$$S_{[-\pi,\pi]} = \left\{-\frac{11\pi}{18}, -\frac{7\pi}{18}, \frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}, \frac{17\pi}{18}\right\}$$

6 EXERCICES : Les exercices de base

1. Déterminer :
   a. $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ b. $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ c. $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$

   d. $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ e. $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ f. $\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$

2. Sachant que $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$:

   (a) Déterminer $\cos x$ sachant que $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

   (b) Déterminer $\sin x$ sachant que $\cos x = -\frac{1}{2}$

3. Résoudre sur $[-\pi, \pi]$:
   a. $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ b. $\sin x = \frac{1}{2}$ c. $-\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ d. $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

4. Résoudre sur $[-\pi, 3\pi]$:
   a. $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ b. $\sin x = -\frac{1}{2}$ c. $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ d. $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

5. Résoudre sur $[-\pi, \pi]$:
   a. $\cos^2 x = \frac{1}{2}$ b. $4\sin^2 x - 3 = 0$ c. $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. Résoudre sur $[-\pi, \pi]$:
   a. $\cos x \leqslant \frac{1}{2}$ b. $\sin x \geqslant 0$ c. $\sin x \cos x \geqslant 0$

7 EXERCICES : Les exercices de base (corrigés)

1. a. $\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

   b. $\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)=\cos\left(\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

   c. $\sin\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)=\sin\left(\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)=-\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{1}{2}$

   d. $\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

   e. $\cos\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)=\cos\left(\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{1}{2}$

   f. $\sin\left(-\dfrac{3\pi}{2}\right)=-\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=-\sin\left(\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$

2. On sait que $x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ et on utilise la relation $\sin^2 x+\cos^2 x=1$.

   (a) $\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ donc $\cos^2 x=1-\sin^2 x=1-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$

   L'équation $\cos^2 x=\dfrac{2}{3}$ a deux solutions mais comme $x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$, on ne gardera que la solution négative, a savoir :

   $\cos x=-\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

   (b) $\cos x=-\dfrac{1}{2}$ donc $\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$

   L'équation $\sin^2 x=\dfrac{2}{3}$ a deux solutions mais comme $x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$, on ne gardera que la solution positive, a savoir :

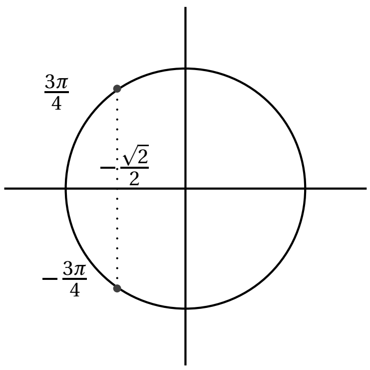
   $\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

3. Résoudre sur $[-\pi,\pi]$:

   a. $\cos x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\iff\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{3\pi}{4}\\ \text{ou}\\ x=-\dfrac{3\pi}{4}\end{array}\right.$$



On procède de la même façon et on obtient :

b. $\sin x = \dfrac{1}{2} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{5\pi}{6} \end{cases}$

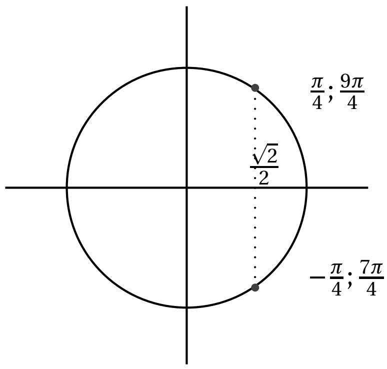
c. $-\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Longleftrightarrow \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{\pi}{6} \end{cases}$

d. $\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{4} \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{3\pi}{4} \end{cases}$

4. Résoudre sur $[-\pi, 3\pi]$:

a. $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{4} \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{\pi}{4} \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{7\pi}{4} \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{9\pi}{4} \end{cases}$



On procède de la même façon et on obtient :

b. $\sin x = -\dfrac{1}{2}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{5\pi}{6} \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{\pi}{6} \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{7\pi}{6} \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{11\pi}{64} \end{cases}$

c. $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

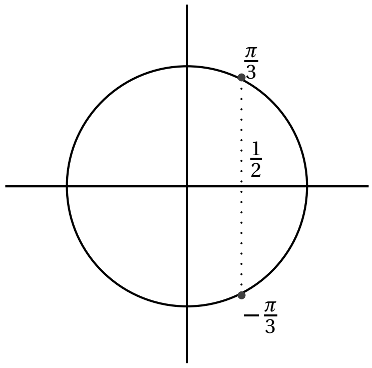
$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{5\pi}{6} \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{\pi}{6} \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{7\pi}{6} \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{11\pi}{64} \end{cases}$

5. Résoudre sur $[-\pi, \pi]$:

a. $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}$

$\cos^2 x = \frac{1}{2} \iff \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
Soit $x = -\frac{3\pi}{4}$ ou $x = -\frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{3\pi}{4}$
b. $4\sin^2 x - 3 = 0$
$4\sin^2 x - 3 = 0 \iff (2\sin x - \sqrt{3})(2\sin x + \sqrt{3}) = 0 \iff \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
Soit $x = -\frac{2\pi}{3}$ ou $x = -\frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{2\pi}{3}$
c. $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \iff x - \frac{\pi}{4} = -\frac{5\pi}{6}$ ou $x - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{6}$ soit $x = -\frac{7\pi}{12}$ ou $x = -\frac{13\pi}{12}$ mais sur $[-\pi, \pi]$
seul convient $x = -\frac{7\pi}{12}$

6. Résoudre sur $[-\pi, \pi]$:
   a. $\cos x \leqslant \frac{1}{2}$



   $\cos x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$
   $\iff x \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$

   b.$\sin x \geqslant 0$
   $\sin x \geqslant 0 \iff x \in [0; \pi]$.

   c. $\sin x \cos x \geqslant 0$
   $\sin x \cos x \geqslant 0 \iff x \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$