

# PROBABILITÉS

Ph DEPRESLE

14 avril 2016

## Table des matières

<b>1 Univers, événement</b>	<b>2</b>
<b>2 Probabilité d'un événement</b>	<b>3</b>
<b>3 Les exercices</b>	<b>5</b>
<b>4 Les exercices corrigés</b>	<b>7</b>

## 1 Univers, événement

**Définition 1.** Une expérience aléatoire est une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat à l'avance.

- ◇ L'univers  $\Omega$  est l'ensemble des résultats possibles (issues) de l'expérience aléatoire.
- ◇ Un événement  $A$  est une partie de l'ensemble  $\Omega$  des issues :  $A \subset \Omega$ .
- ◇ Les événements élémentaires sont les événements réduits à une unique issue de l'expérience.

**Exemples :**

### 1. Expérience n 1 :

On lance un dé équilibré à 6 faces et on note le résultat obtenu sur la face supérieure. L'univers de l'expérience est l'ensemble  $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ .

L'événement « obtenir un nombre pair » est l'ensemble  $I = \{2; 4; 6\}$ .

L'événement « obtenir 4 » est un événement élémentaire.

Il y a 6 événements élémentaires.

### 2. Expérience n 2 :

On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. L'univers de l'expérience est l'ensemble  $\Omega$  des 32 cartes :  $\Omega = \{\text{as de pique ; as de cœur ; ... ; sept de carreau ; sept de trèfle}\}$ .

L'événement « tirer un roi » est l'ensemble :  $J = \{\text{roi de trèfle ; roi de carreau ; roi de cœur ; roi de pique}\}$ .

L'événement « tirer l'as de cœur » est un événement élémentaire.

Il y a 32 événements élémentaires.

### 3. Expérience n 3 :

On tire au hasard une boule dans une urne contenant 2 boules blanches, 3 boules jaunes 4 boules noires. On note la couleur de la boule tirée.

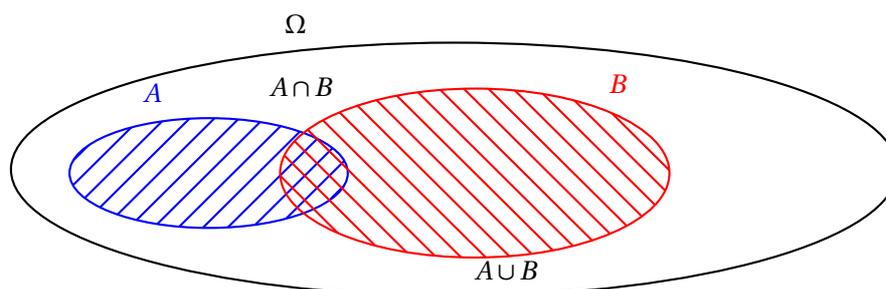
On peut choisir comme univers de l'expérience l'ensemble  $\Omega = \{\text{boule blanche ; boule jaune ; boule noire}\}$ .

L'événement « tirer une boule de couleur claire » est l'ensemble :  $K = \{\text{boule blanche ; boule jaune}\}$ .

L'événement « tirer une boule blanche » est un événement élémentaire.

Il y a 3 événements élémentaires.

- L'événement complémentaire de  $A$ , ou événement contraire de  $A$ , noté  $\bar{A}$  contient tous les éléments de  $\Omega$  qui ne sont pas éléments de  $A$ .
- Si  $A$  et  $B$  sont deux événements :
  - l'événement  $A \cup B$  est réalisé si l'un au moins des événements  $A$  ou  $B$  est réalisé.
  - l'événement  $A \cap B$  est réalisé si  $A$  et  $B$  sont réalisés tous les deux.
  - $A$  et  $B$  sont dits incompatibles si  $A \cap B = \emptyset$ .



## 2 Probabilité d'un événement

On envisage une expérience aléatoire comportant un nombre fini d'issues :  $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \dots; \omega_n\}$ .  
Le nombre  $n$  des éléments de  $\Omega$  est noté  $\text{card}(\Omega)$ , ce qui se lit " cardinal de  $\Omega$  ".

Définir une probabilité sur  $\Omega$  c'est associer à chacune des issues  $\omega_i$ , un nombre noté  $P(\omega_i)$  avec :

$$0 \leq P(\omega_i) \leq 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n P(\omega_i) = 1.$$

À chaque événement  $A = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_p}\}$  lié à l'expérience est associé alors le nombre  $P(A)$  défini par :  
 $P(A) = P(\omega_{i_1}) + \dots + P(\omega_{i_p})$

### Propriétés 1.

- $0 \leq P(A) \leq 1$  et  $P(\Omega) = 1$
- $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .
- Si  $A$  et  $B$  sont incompatibles, alors  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .
- Si tous les événements élémentaires  $\{\omega_i\}$  ont la même probabilité, on dit qu'il y a équiprobabilité. On a alors :

$$P(A) = \frac{\text{Nombre des issues favorables à A}}{\text{Nombre des issues possibles}} = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

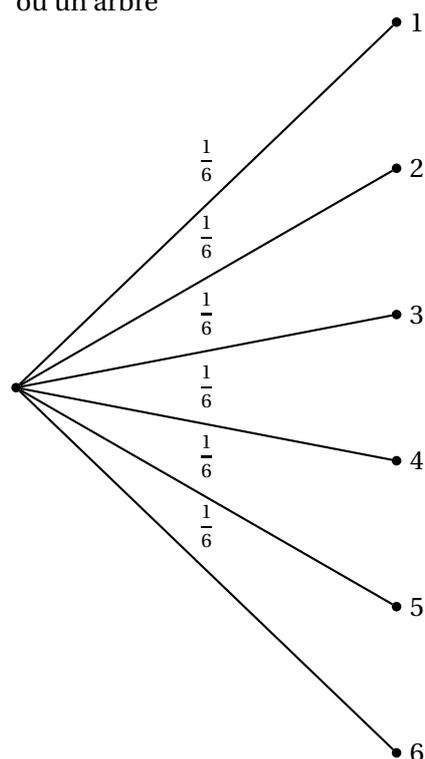
### Exemples :

1. Dans l'expérience n 1, en considérant qu'il y a équiprobabilité, la probabilité d'un événement élémentaire est  $\frac{1}{6}$

On peut faire un tableau

$\omega$	1	2	3	4	5	6
$p(\omega)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

ou un arbre



La probabilité de l'événement  $I$  : "tirer un nombre pair" est  $p(I) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Dans l'expérience n 2, la probabilité d'un événement élémentaire est  $\frac{1}{32}$ , celle de l'événement

$R$  : "tirer un roi" est  $p(R) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$

Dans l'expérience n 3, Les issues de l'univers choisi ne sont pas équiprobables.

Toutefois, en numérotant les boules blanches, jaunes, noires, on peut choisir comme univers  $\Omega = \{B1, B2, J1, J2, J3, N1, N2, N3, N4\}$ . En supposant que chaque boule a autant de chances d'être tirée, il y a équiprobabilité sur  $\Omega$ .

$$p(\{\text{boule blanche}\}) = \frac{2}{9} \qquad p(\{\text{boule jaune}\}) = \frac{3}{9} \qquad p(\{\text{boule noire}\}) = \frac{4}{9}$$

2. Dans l'expérience n 1, l'événement contraire de l'événement  $I$  : "tirer un nombre pair" est l'événement

$\bar{I}$  : "tirer un nombre impair"  $p(\bar{I}) = 1 - p(I) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Dans l'expérience n 2, l'événement contraire de l'événement  $R$  : "tirer un roi" est l'événement

$\bar{R}$  : "ne pas tirer un roi"  $p(\bar{R}) = 1 - p(R) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

Dans l'expérience n 3, l'événement contraire de l'événement  $B$  : "tirer une boule blanche" est

l'événement  $\bar{B}$  : "ne pas tirer une boule blanche"  $p(\bar{B}) = 1 - p(B) = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$

3. Dans l'expérience n 2, on considère l'événement  $A$  : "tirer un roi" et l'événement  $B$  : "tirer un cœur".

$A \cap B$  est l'événement élémentaire "tirer un roi de cœur", donc  $P(A \cap B) = \frac{1}{32}$ .

On a  $p(A) = \frac{1}{8}$  et  $p(B) = \frac{1}{4}$ .

L'événement  $A \cup B$  a pour probabilité :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{32} = \frac{11}{32}$$

### 3 Les exercices

1. (a) Une expérience aléatoire consiste à lancer deux dés à 6 faces et à noter la somme des faces obtenues. Donner l'univers  $\Omega$  de cette expérience.
- (b) Même question si l'expérience consiste à noter le produit des faces obtenues lors du lancer de deux dés à six
2. Un club de vacances comprend 100 touristes qui se répartissent selon le tableau ci-dessous :

	homme	femme
pratique un sport	48	12
ne pratique aucun sport	16	24

- (a) On choisit un touriste au hasard dans ce club. Quelle est la probabilité :
  - i. que ce soit un homme ?
  - ii. que ce soit une femme ?
  - iii. qu'il pratique un sport ?
  - iv. que ce soit un homme qui pratique un sport ?
- (b) On choisit un touriste au hasard parmi les hommes. Quelle est la probabilité qu'il pratique un sport ?
3. On considère deux événements A et B tels que :

$$P(A) = 0,3 \quad P(\bar{B}) = 0,5 \quad P(A \cap B) = 0,2$$

Déterminer  $P(\bar{A})$   $P(B)$   $P(A \cup B)$ .

4. Un jour de grève, dans une grande gare, la probabilité qu'il n'y ait aucun train est de 25 %. La probabilité qu'il y ait tous les trains est de 5 %.
  - (a) Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins un train ?
  - (b) Quelle est la probabilité qu'il manque au moins un train ?
5. Dans un atelier de fabrication de pièces mécaniques, on a constaté que parmi les pièces produites, 6% ont le défaut A, 5% ont le défaut B et 92% n'ont aucun défaut. On choisit une pièce au hasard et on note :
  - A l'évènement « la pièce a le défaut A » ;
  - B l'évènement « la pièce a le défaut B ».
  - (a) Calculer la probabilité de l'évènement  $A \cup B$ .
  - (b) En déduire la probabilité que la pièce produite ait les deux défauts.

6. Une urne contient des boules rouges et des boules blanches.
  - (a) L'urne contient 4 boules rouges et 2 boules blanches. On en tire deux successivement et sans remise. Quelle est la probabilité de tirer 2 boules rouges ?
  - (b) L'urne contient 3 boules rouges et 27 boules blanches. On en tire trois successivement et sans remise. Quelle est la probabilité de tirer 3 boules rouges ?
  - (c) L'urne contient 10 boules rouges et 15 boules blanches. On en tire deux successivement et sans remise. Quelle est la probabilité de tirer 4 boules rouges ?

## 7. QCM

Questions	Réponses
1. La probabilité de l'événement $\bar{A}$ est égale à	<input type="checkbox"/> $P(A)$ <input type="checkbox"/> $1 - P(A)$ <input type="checkbox"/> $P(A) - 1$
2. La probabilité de l'événement $A \cap B$ est égale à	<input type="checkbox"/> $P(A \cup B) - P(A) - P(B)$ <input type="checkbox"/> $P(A) + P(B) + P(A \cup B)$ <input type="checkbox"/> $P(A) + P(B) - P(A \cup B)$
3. On lance simultanément deux pièces de monnaie identiques. Quelle est la probabilité qu'elles tombent sur la même face ?	<input type="checkbox"/> $\frac{1}{4}$ <input type="checkbox"/> $\frac{1}{2}$ <input type="checkbox"/> $\frac{1}{4}$
4. On lance simultanément deux pièces de monnaie identiques. Quelle est la probabilité qu'elles tombent sur deux faces pile ?	<input type="checkbox"/> $\frac{1}{4}$ <input type="checkbox"/> $\frac{1}{2}$ <input type="checkbox"/> $\frac{1}{4}$
5. On lance simultanément deux dés équilibrés à 6 faces. Quelle est la probabilité d'obtenir un et un seul six ?	<input type="checkbox"/> $\frac{5}{6}$ <input type="checkbox"/> $\frac{1}{3}$ <input type="checkbox"/> $\frac{5}{18}$

## 4 Les exercices corrigés

1. (a) La somme des deux ds peut-être tout nombre entier compris entre :  
2 (1 + 1) et 12 (6 + 6).

On a donc  $\Omega = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$ .

- (b) Le plus simple est de faire un tableau

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

On a donc  $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 9; 10; 12; 15; 16; 18; 20; 24; 25; 30; 36\}$ .

2. (a) Le touriste étant choisi complètement au hasard, il y a équiprobabilité parmi les 100 touristes du club

i. La probabilité que ce soit un homme est  $\frac{48 + 16}{100} = 0,64$ .

ii. La probabilité que ce soit une femme est  $\frac{12 + 24}{100} = 0,36$ .

iii. La probabilité qu'il pratique un sport est  $\frac{48 + 12}{100} = 0,6$ .

iv. La probabilité que ce soit un homme qui pratique un sport est  $\frac{48}{100} = 0,48$ .

- (b) Le touriste étant choisi parmi les hommes, il y a équiprobabilité parmi les 64 hommes.

Alors la probabilité que cet homme pratique un sport est :  $\frac{48}{64} = \frac{3}{4} = 0,75$ .

3.  $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,3 = 0,7$

$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - 0,05 = 0,95$ .

$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,3 + 0,95 - 0,65 = 0,6$ .

4. (a) L'événement "il y a au moins un train" est l'événement contraire de "il n'y a aucun train". Sa probabilité est donc de  $1 - 0,25 = 0,75$ .

- (b) L'événement "il manque au moins un train" est l'événement contraire de "il n'y a tous les trains". Sa probabilité est donc de  $1 - 0,05 = 0,95$ .

5. (a) D'après l'énoncé on a  $P(A) = 0,6$  et  $P(B) = 0,05$ . Dire que 92% n'ont aucun défaut est le contraire que de dire A a un défaut ou B a un défaut.

Donc  $P(A \cap B) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - 0,08 = 0,92$ .

- (b) On sait que  $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$  donc :

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,6 + 0,05 - 0,92 = 0,03$ .

6. (a) L'urne contient 4 boules rouges et 2 boules blanches. En tout il y a 6 boules.

La probabilité de tirer en premier une boule rouge est  $P(R_1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ .

Comme le tirage est sans remise l'urne contient maintenant 3 boules rouges et 2 boules blanches. En tout il reste 5 boules.

La probabilité de tirer en second une boule rouge est  $P(R_2) = \frac{3}{5}$ .

La probabilité de tirer 2 boules rouges est :  $P(R_1 \cap R_2) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$ .

(b) On raisonne de la même façon et on obtient :

$$P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = \frac{3}{30} \times \frac{2}{29} \times \frac{1}{28} = \frac{3}{4060}.$$

(c) On raisonne de la même façon et on obtient :

(d) On raisonne de la même façon et on obtient :

$$P(R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap R_4) = \frac{10}{25} \times \frac{9}{24} \times \frac{8}{23} \times \frac{7}{22} = \frac{21}{1265}$$

### 7. QCM

Questions	Réponses
1. La probabilité de l'événement $\bar{A}$ est égale à	<input type="checkbox"/> P(A) <input checked="" type="checkbox"/> 1 - P(A) <input type="checkbox"/> P(A) - 1
2. La probabilité de l'événement $A \cap B$ est égale à	<input type="checkbox"/> $P(A \cup B) - P(A) - P(B)$ <input type="checkbox"/> $P(A) + P(B) + P(A \cup B)$ <input checked="" type="checkbox"/> $P(A) + P(B) - P(A \cup B)$
3. On lance simultanément deux pièces de monnaie identiques. Quelle est la probabilité qu'elles tombent sur la même face ?	<input type="checkbox"/> $\frac{1}{4}$ <input checked="" type="checkbox"/> $\frac{1}{2}$ <input type="checkbox"/> $\frac{1}{4}$
4. On lance simultanément deux pièces de monnaie identiques. Quelle est la probabilité qu'elles tombent sur deux faces pile ?	<input type="checkbox"/> $\frac{1}{4}$ <input type="checkbox"/> $\frac{1}{2}$ <input checked="" type="checkbox"/> $\frac{1}{4}$
5. On lance simultanément deux dés équilibrés à 6 faces. Quelle est la probabilité d'obtenir un et un seul six ?	<input type="checkbox"/> $\frac{5}{6}$ <input type="checkbox"/> $\frac{1}{3}$ <input checked="" type="checkbox"/> $\frac{5}{18}$