FONCTIONS DU SECOND DEGRÉ ET HOMOGRAPHIQUES

Ph DEPRESLE

26 juin 2015

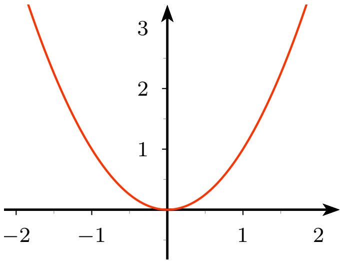
Table des matières

1 Fonction carré

1.1 Fonction $x \mapsto x^2$

Définition 1. *La fonction carré est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$. Sa courbe représentative dans un repère orthogonal est appelée parabole d'équation $y = x^2$, de sommet le centre O du repère.*

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		$\searrow$	0	$\nearrow$	



Propriétés 1. *La fonction carré est strictement décroissante sur* $]-\infty, 0]$ *et strictement croissante sur* $[0, +\infty[$

Démonstration
Soient $x_1 < x_2 \leqslant 0$
${x_1}^2 - {x_2}^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$
or $x_1 + x_2 < 0$ car x_1 et x_2 sont négatifs.
et $x_1 - x_2 < 0$ car $x_1 < x_2$
donc ${x_1}^2 - {x_2}^2$ est positif comme produit de deux négatifs donc ${x_1}^2 \geqslant {x_2}^2$ et la fonction carrée est décroissante sur $]-\infty, 0]$.
Même démonstration pour montrer que la fonction carrée est croissante sur $[0, +\infty[$.▲

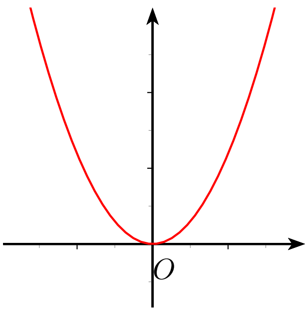
1.2 Fonction $x \mapsto ax^2, \quad a \neq 0$

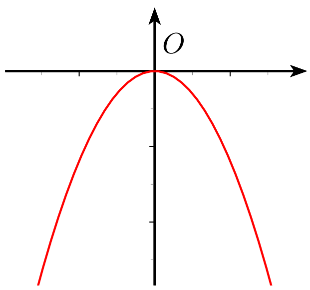
Si $a > 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
ax^2		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Si $a < 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
ax^2		$\nearrow$	0	$\searrow$	





Définition 2. *La courbe représentative de f dans un repère orthogonal est appelée parabole d'équation $y = ax^2$, de sommet le centre O du repère.*
Si $a > 0$ on dit que la parabole est tournée vers le haut.
Si $a < 0$ on dit que la parabole est tournée vers le bas.

2 Fonctions polynôme de degré 2

2.1 Définition

Définition 3. *Une fonction polynôme du second degré (ou trinôme) est une fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, *où* a, b, c *sont trois nombres réels tels que* $a \neq 0$.

Exemple :

$f : x \mapsto 2x^2 + \frac{x}{3} + 2$ et $g : x \mapsto -x^2 + 5 + \sqrt{2}$ sont des fonctions polynôme du second degré.

2.2 Variations

Propriétés 2.
Soit f *une fonction polynôme du second degré définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $x \mapsto ax^2 + bx + c$, *où* $a \neq 0$.
◇ *Si* $a > 0$, *alors la fonction* f *est d'abord décroissante puis croissante.*
◇ *Si* $a < 0$, *alors la fonction* f *est d'abord croissante puis décroissante.*

Démonstration
Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, où $a \neq 0$.

Considérons les intervalles $]-\infty; -\frac{b}{2a}]$ et $[-\frac{b}{2a}; +\infty[$.

Soient x_1 et x_2 deux nombres distincts de $[-\frac{b}{2a}; +\infty[$ avec $x_2 > x_1$

◇ On a $x_1 \geqslant -\frac{b}{2a}$ et $x_2 \geqslant -\frac{b}{2a}$ donc $x_1 + x_2 \geqslant -\frac{b}{a}$

Ce qui prouve que $x_1 + x_2 + \frac{b}{a} \geqslant 0$ (1)

◇ Calculons $f(x_2) - f(x_1)$

$$\begin{aligned}
f(x_2) - f(x_1) &= (a{x_2}^2 + bx_2 + c) - (a{x_1}^2 + bx_1 + c) \\
&= a({x_2}^2 - {x_1}^2) + b(x_2 - x_1) \\
&= a(x_2 + x_1)(x_2 - x_1) + b(x_2 - x_1) \\
&= (x_2 - x_1)(a(x_2 + x_1) + b) \\
&= a(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 + \frac{b}{a})
\end{aligned}$$

On a :
– $a > 0$ car on est dans ce cas.
– $x_2 - x_1 > 0$ car on a choisi $x_2 > x_1$
– $x_1 + x_2 + \frac{b}{a} > 0$ d'après (1)
Le produit de trois nombres positifs est positif donc $f(x_2) - f(x_1) > 0$.

On a supposé $x_2 > x_1$ et on a $f(x_2) > f(x_1)$ donc f est croissante sur $[-\frac{b}{2a}; +\infty[$.

On démontre de la même manière que f est décroissante sur $[\infty; -\frac{b}{2a}[$.

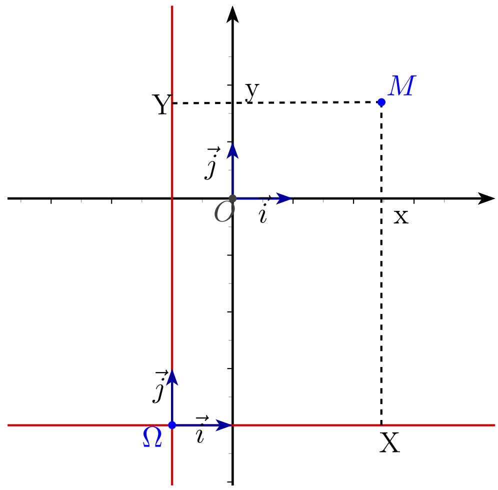
Étudions le cas ou $a < 0$:
Le raisonnement est le même.▲

2.3 Exemple

Soit $f : x \mapsto 2x^2 + 4x - 2$. C'est une fonction polynôme du second degré.
On peut écrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = 2(x + 1)^2 - 4$.
f a pour minimum -4, atteint en -1. Soit $\mathscr{P}$ sa représentation graphique dans le repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

$$\begin{aligned} M(x, y) \in \mathscr{P} &\iff y = f(x) \\ &\iff y = 2x^2 + 4x - 2 \\ &\iff y = 2(x + 1)^2 - 4 \\ &\iff y + 4 = 2(x + 1)^2 \\ &\iff Y = 2X^2 \end{aligned}$$

On a posé $\begin{cases} X = x + 1 \\ \text{et} \\ Y = y + 4 \end{cases}$ ce qui revient à changer de repère et à prendre pour nouveau repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\Omega(-1, -4)$.

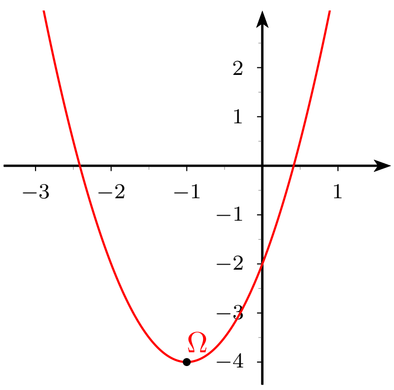


Dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$, M a pour coordonnées (x, y) et dans $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$, M a pour coordonnées (X, Y). $\mathscr{P}$ a pour équation $Y = 2X^2$ dans $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$, c'est donc une parabole de sommet $\Omega(-1, -4)$ et tournée vers le haut.

Les variations de f sont :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-4	$\nearrow$

et sa courbe est



2.4 Représentation graphique d'une fonction trinôme

Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$ une fonction trinôme.

Théorème 1. *(admis)*
Il existe deux réels α et β tels que, pour tout x réel, $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.
Cette expression s'appelle forme canonique de f.

- Soit f une fonction polynôme du second degré dont forme canonique est : $f(x) = a(x-\alpha)^2+\beta$.
  Si $a > 0 \quad f(x) \geqslant \beta$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et β est le minimum de f atteint pour $x = \alpha$.
  Si $a < 0 \quad f(x) \leqslant \beta$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et β est le maximum de f atteint pour $x = \alpha$.
- Soit $\mathscr{P}$ la représentation graphique de f dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

$$\begin{aligned} M(x,y) \in \mathscr{P} &\iff y = a(x-\alpha)^2 + \beta \\ &\iff y - \beta = a(x-\alpha)^2 \\ &\iff Y = aX^2 \end{aligned}$$

en posant $\begin{cases} X = x - \alpha \\ Y = y - \beta \end{cases}$

(X, Y) sont alors les coordonnées de M dans le nouveau repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ où Ω est le point de coordonnées (α, β) dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
$Y = aX^2$ est une équation de parabole, donc :
$\mathscr{P}$ est une parabole de sommet $\Omega(\alpha, \beta)$ et tournée vers le haut si $a > 0$
$\mathscr{P}$ est une parabole de sommet $\Omega(\alpha, \beta)$ et tournée vers le bas si $a < 0$

- Les variations de f sont alors :

Si $a > 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		$\searrow$	β	$\nearrow$	

Si $a < 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		$\nearrow$	β	$\searrow$	

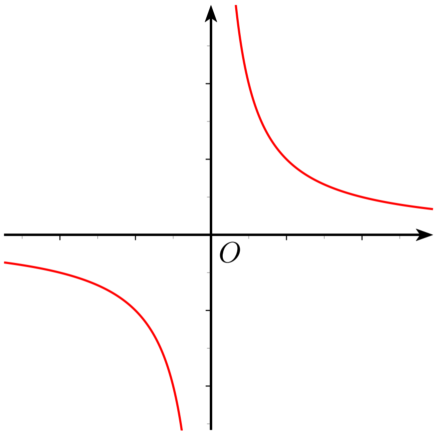
Propriétés 3. *La représentation graphique d'une fonction trinôme est une parabole.*

3 Fonction inverse

3.1 Fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$

Définition 4. *La fonction inverse est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$par : $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Sa courbe représentative dans un repère orthogonal est appelée hyperbole. Elle admet l'origine O du repère comme centre de symétrie.*

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$\searrow$	$\parallel$	$\searrow$



Propriétés 4. *La fonction inverse est strictement décroissante sur* $]-\infty, 0[$ *et strictement décroissante sur* $]0, +\infty[$.

Démonstration

Soient $x_1 < x_2 < 0$

$\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} > 0$ car $x_2 > x_1$ et x_1x_2 produit de deux négatifs est positif donc $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$.
et la fonction inverse est décroissante sur $]-\infty, 0[$.
Même démonstration pour montrer que la fonction inverse est décroissante sur $]0, +\infty[$.▲

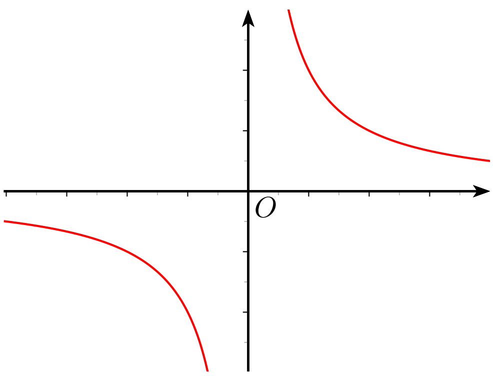
3.2 Fonction $x \mapsto \frac{a}{x}$

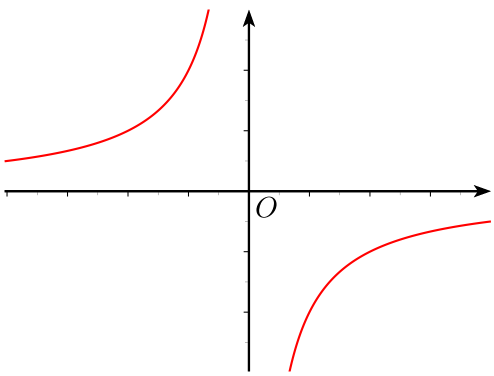
Si $a > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{a}{x}$	$\searrow$	$\parallel$	$\searrow$

Si $a < 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{a}{x}$	$\nearrow$	$\parallel$	$\nearrow$





4 Fonctions homographiques

Définition 5. *Une fonction homographique est de la forme* $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}, \quad c \neq 0.$

4.1 Exemple

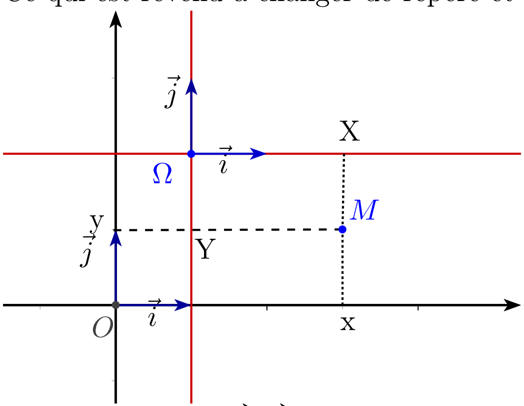
Soit $f\ :\ x \mapsto \dfrac{2x+1}{x-1}$ sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. C'est une fonction homographique. Sa forme réduite est $f(x) = 2 + \dfrac{3}{x-1}$.
Ses variations ont été étudiées au chapitre précédent.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$2+\dfrac{3}{x+1}$	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$

Soit $\mathscr{H}$ sa représentation graphique dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

$$\begin{aligned} M(x,y)\in\mathscr{H} &\iff y = f(x)\\ &\iff y = \frac{2x+1}{x-1}\\ &\iff y = 2+\frac{3}{x-1} \qquad \text{On a posé } \begin{cases} X = x-1\\ \text{et}\\ Y = y-2\end{cases}\\ &\iff y-2 = \frac{3}{x-1}\\ &\iff Y = \frac{3}{X}\end{aligned}$$

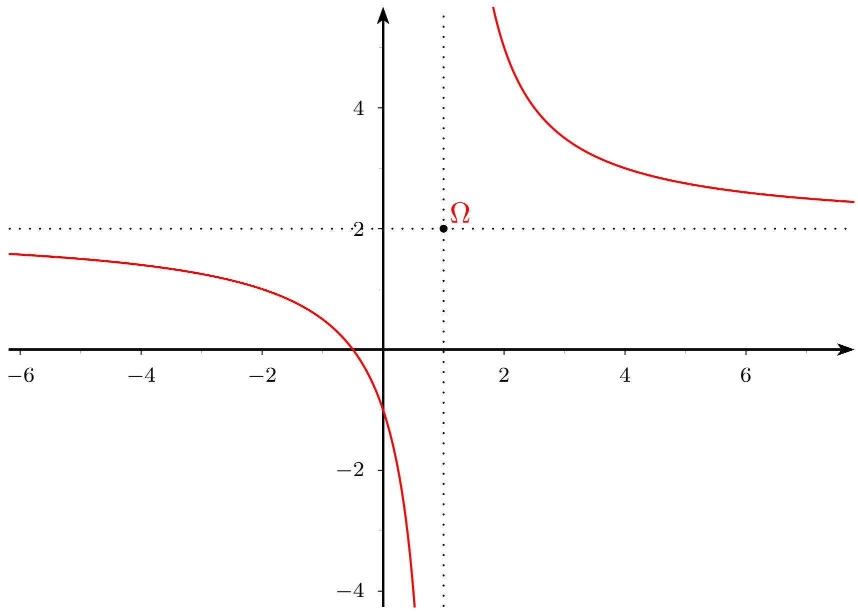
Ce qui est revenu à changer de repère et à prendre pour nouveau repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\Omega(1,2)$.



Dans ce dessin les coordonnées de M dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ sont (3,1) et les coordonnées de M dans $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ sont (2,-1).

$M(x,y)$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$
$M(X,Y)$ dans $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

$\mathscr{H}$ a pour équation $Y = \dfrac{3}{X}$ dans $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$, c'est donc une hyperbole dont le centre de symétrie est Ω, et dont les asymptotes sont les axes du nouveau repère, c'est à dire les droites d'équation $x = 1$ et $y = 2$.



4.2 Représentation graphique d'une fonction homographique

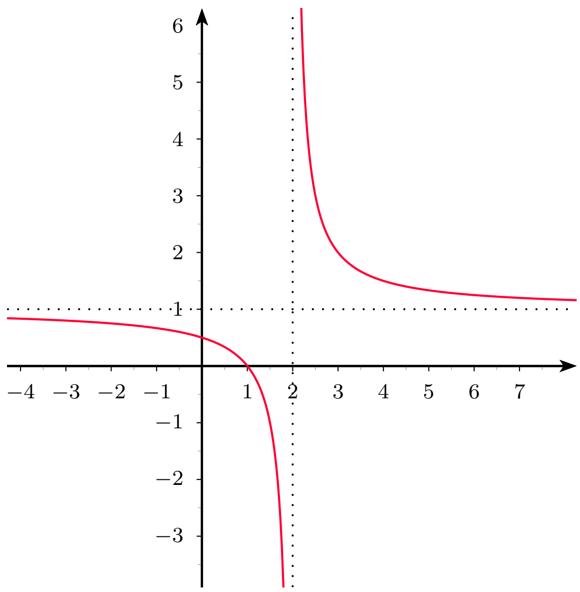
Propriétés 5. *toute fonction homographique se met sous forme réduite* $x \mapsto A + \dfrac{B}{x-\alpha}$, *avec* $B \neq 0$.

Dans les deux cas la représentation graphique est une hyperbole de centre $\Omega(\alpha, A)$ et d'asymptotes les droites d'équation $x = \alpha$ et $y = A$

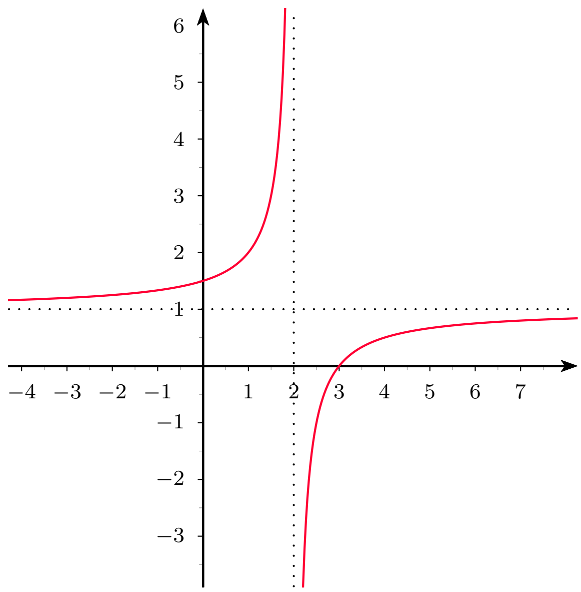
$x \mapsto \dfrac{1}{x-\alpha}$ est de la forme $\dfrac{1}{u}$ avec $u : x \mapsto x - \alpha$ croissante sur $\mathbb{R}$.

Ses variations sont donc :

Si $B > 0$



Si $B < 0$

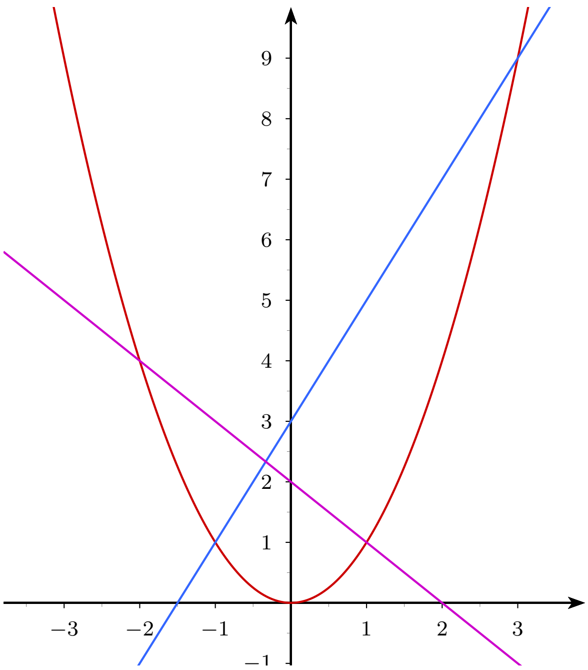


5 Les exercices

1. Donner le domaine de définition des fonctions suivantes :
   a. $f : x \mapsto \dfrac{3x+1}{x+2}$ b. $f : x \mapsto 5 - \sqrt{2-x^2}$ c. $f : x \mapsto \dfrac{3x+1}{5x^2+7}$

2. Soit x un nombre réel.
   (a) L'affirmation « Si $x^2 \geqslant 9$ alors $x \geqslant 3$ » est-elle vraie ?
   (b) Écrire une proposition équivalente à : $x^2 \geqslant 9$.

3. Utiliser le graphique et seulement le graphique pour résoudre les équations et inéquations suivantes :
   a. $x^2 = 2x + 3$ b. $x^2 + x - 2 = 0$ c. $x^2 \leqslant 2x + 3$ *d.* $x \leqslant x^2 \leqslant 2x + 3$



4. On considère la fonction f définie sur $[-4; 2]$ par $f(x) = x^2 + x - 2$.
   (a) Recopier et compléter, à l'aide de la calculatrice, le tableau de valeurs suivant :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$							

   (b) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
   (c) i. Tracer sur le graphique la représentation graphique de la fonction g définie par $g(x) = x$.
   ii. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.
   iii. Retrouver les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ par le calcul.

5. **QCM**

Questions	**Réponses**
1. la fonction x^2 est décroissante sur	☐ $]-\infty;0]$ ☐ $\mathbb{R}$ ☐ $[0;+\infty[$
2. Si $f(x)=x^2$ le nombre 2 a	☐ deux antécédents ☐ un antécédent ☐ aucun
3. Si $f(x)=\dfrac{1}{x}$ le nombre 2 a	☐ deux antécédents ☐ un antécédent ☐ aucun
4. Le tableau de variations de $f(x)=\sqrt{2}x^2$	☐ n'a aucune valeur interdite ☐ a une valeur interdite ☐ a deux valeurs interdites
5. Sur l'intervalle $]0;+\infty[$ les représentations graphiques de $f(x)=-x^2$ et $g(x)=\dfrac{1}{x}$ ont	☐ un point commun ☐ deux points communs ☐ aucun point commun

6 Les exercices corrigés

1. a. $f : x \mapsto \dfrac{3x+1}{x+2}$
   On doit avoir $x+2 \neq 0$ soit $x \neq -2$ et donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-2\}$.

   b. $f : x \mapsto 5 - \sqrt{2-x^2}$
   On doit avoir $2 - x^2 \geqslant 0$ soit $\mathcal{D}_f = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

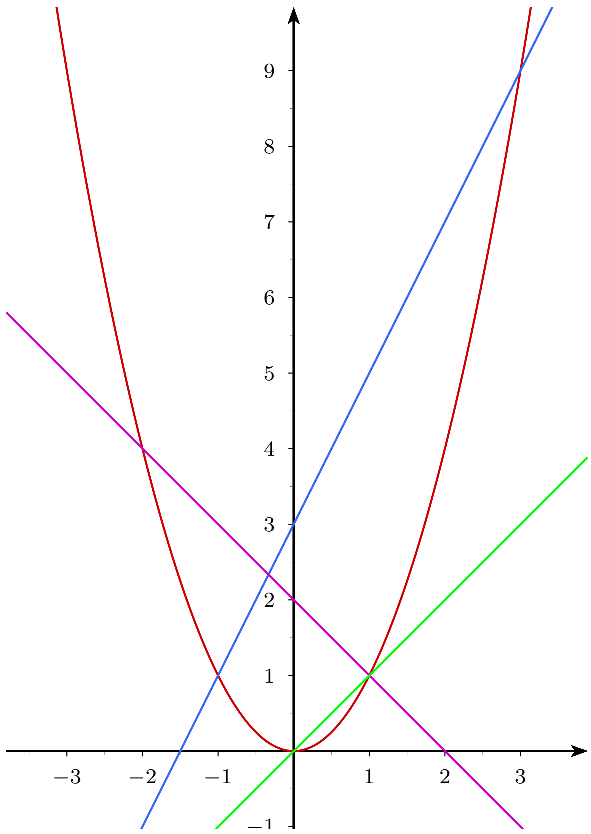
   c. $f : x \mapsto \dfrac{3x+1}{5x^2+7}$
   On a $5x^2 + 7 \neq 0$ quelque soit $x \in \mathbb{R}$ donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

2. Soit x un nombre réel.
   (a) L'affirmation « Si $x^2 \geqslant 9$ alors $x \geqslant 3$ » est fausse. En effet si $x = -10$ on a $100 \geqslant 9$ et $-10 \leqslant 9$
   (b) Une proposition équivalente à : $x^2 \geqslant 9$ est $x^2 - 9 \geqslant 0$ soit après avoir fait un tableau de signe $x \in]-\infty; -3] \cup [3; +\infty[$.

3. a. $x^2 = 2x + 3$
   $y = x^2$ est la parabole rouge et $y = 2x+3$ est la droite bleue. Ces deux courbes se coupent en $x = -1$ et $x = 3$.

   b. $x^2 + x - 2 = 0$
   cela revient à résoudre $x^2 = -x + 2$
   $y = x^2$ est la parabole rouge et $y = -x + 2$ est la droite magenta. Ces deux courbes se coupent en $x = -2$ et $x = 1$.

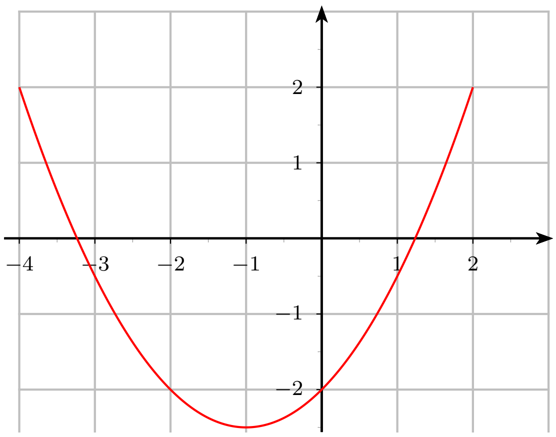
   c. $x^2 \leqslant 2x + 3$
   $y = x^2$ est la parabole rouge et $y = 2x + 3$ est la droite bleue. la parabole est en dessous de la droite pour $x \in [-1; 3]$.
   d. $x \leqslant x^2 \leqslant 2x + 3$
   $y = x^2$ est la parabole rouge et $y = x$ est la première bissectrice (ici en vert). La condition est vérifiée pour $x \in [-1; 0] \cup [1; 3]$.



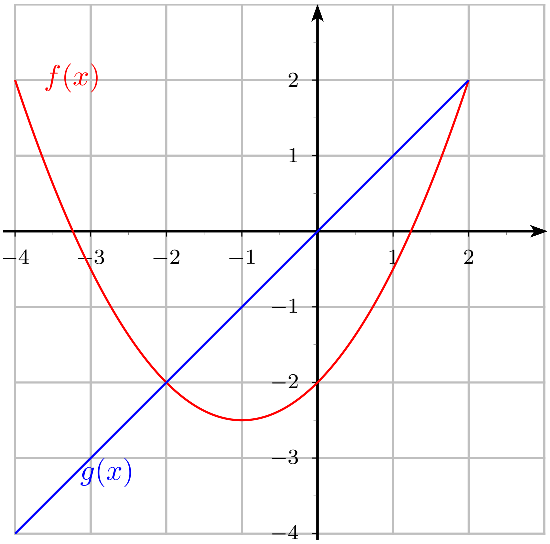
4. On considère la fonction f définie sur $[-4; 2]$ par $f(x) = x2 + x - 2$.
   (a) Le tableau de valeurs est :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	2	$-\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{5}{2}$	-2	$-\frac{1}{2}$	2

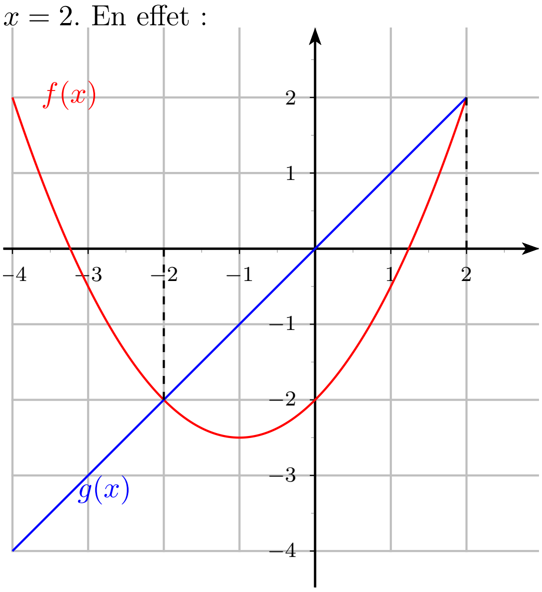
   (b) La courbe représentative de f dans un repère orthonormé est :



(c) i. On obtient :



ii. Graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$ semble avoir pour solution $x = -2$ et $x = 2$. En effet :



iii. L'équation $f(x) = g(x)$ s'écrit $\dfrac{x^2}{2} + x - 2 = x$ soit $\dfrac{x^2}{2} = 2$ et enfin $x^2 = 4$. Les solutions de cette équation sont bien $x = -2$ ou $x = 2$

5. **QCM**

Questions	**Réponses**
1. la fonction x^2 est décroissante sur	■ $]-\infty;0]$ ☐ $\mathbb{R}$ ☐ $[0;+\infty[$
2. Si $f(x)=x^2$ le nombre 2 a	■ deux antécédents ☐ un antécédent ☐ aucun
3. Si $f(x)=\dfrac{1}{x}$ le nombre 2 a	☐ deux antécédents ■ un antécédent ☐ aucun
4. Le tableau de variations de $f(x)=\sqrt{2}x^2$	■ n'a aucune valeur interdite ☐ a une valeur interdite ☐ a deux valeurs interdites
5. Sur l'intervalle $]0;+\infty[$ les représentations graphiques de $f(x)=-x^2$ et $g(x)=\dfrac{1}{x}$ ont	☐ un point commun ☐ deux points communs ■ aucun point commun