TRIGONOMÉTRIE

Ph DEPRESLE

27 juin 2015

Table des matières

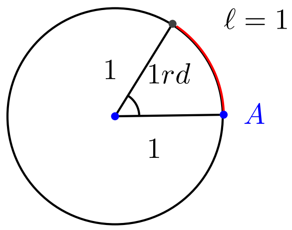
1 Le radian : unité de mesure d'angle

Définition 1. *Soit C un cercle de centre O et de rayon 1.*
Un radian est la mesure d'un angle au centre qui intercepte un arc de longueur 1 du cercle.
La mesure en radians d'un angle au centre est donc la longueur de l'arc que l'angle intercepte sur le cercle C.

Propriétés 1. *La mesure d'un angle en radians est proportionnelle à sa mesure en degrés.*

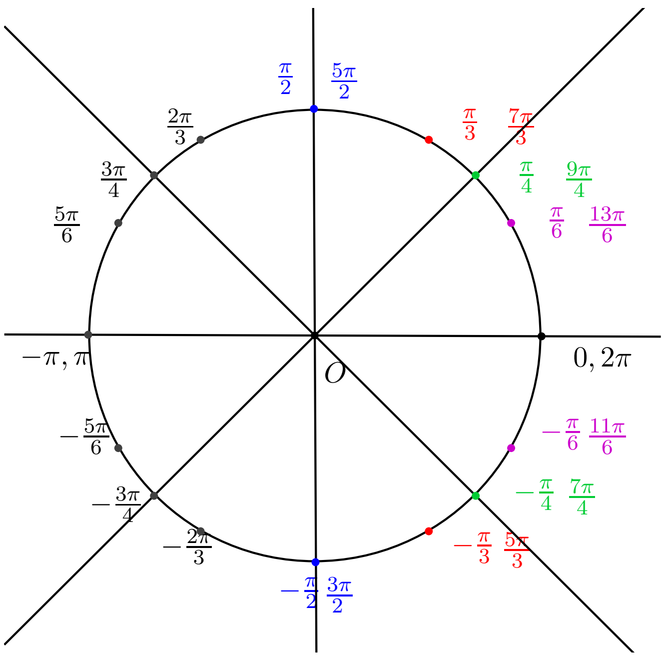
Tableau de proportionnalité :

mesure de l'angle en degré	360°	180°	90°	60°	45°	30°	...	x°
longueur de l'arc du cercle trigonométrique	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{x \times \pi}{180}$
mesure de l'angle en radian	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{x \times \pi}{180}$

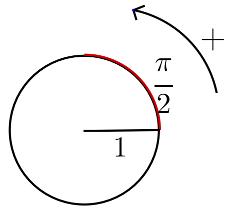


2 Le cercle trigonométrique

On oriente les cercles du plan en choisissant un sens positif (ou direct) : le sens positif est le sens contraire des aiguilles d'une montre.



Définition 2.
Un cercle trigonométrique est un cercle dont le rayon est égal à 1 et qui est orienté dans le sens direct (on dit aussi le sens positif).



La longueur du cercle trigonométrique est 2π
La longueur du quart de cercle trigonométrique est $\frac{\pi}{2}$

3 Cosinus et Sinus

3.1 Enroulement d'une droite autour du cercle trigonométrique

A tout réel est associé un point sur le cercle trigonométrique Soit A un point du cercle. On accroche au point A une ficelle.

- Soit $x > 0$

  La ficelle de longueur x est enroulée autour du cercle dans le sens $+$, à son extrémité le point M. On dit que M est associé au réel x.
- Soit $x < 0$

  La ficelle de longueur $|x|$ est enroulée autour du cercle dans le sens -, à son extrémité le point M. On dit que M est associé au réel x.
- Soit $x = 0$

  C'est le point A qui est associé au réel x.

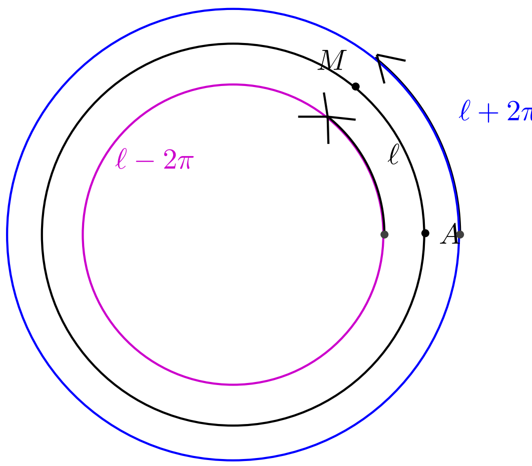
Tout point M du cercle trigonométrique est associé a une infinité de réels

Soit M un point du cercle trigonométrique. On considère un trajet, sur le cercle, pour aller de A à M. On associe alors un réel au point M :

- La longueur du trajet si celui ci suit le sens positif.
- L'opposée de cette longueur s'il suit le sens négatif.

on associe alors au point M :

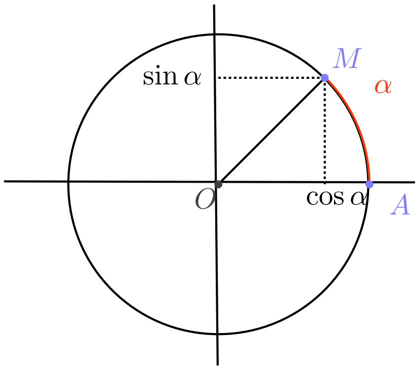
$$\left.\begin{array}{l} \ell \\ \text{mais aussi} \\ -2\pi + \ell \\ \ell + 2\pi \\ \ell + 4\pi \end{array}\right\} \text{tous les } \ell + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$



3.2 Cosinus et sinus d'un nombre réel

Définition 3. *Soit dans un repère orthonormé* $(O, \vec{i}, \vec{j})$, *un cercle trigonométrique de centre* O *et* A *le point du cercle de coordonnées* $(0, 1)$.

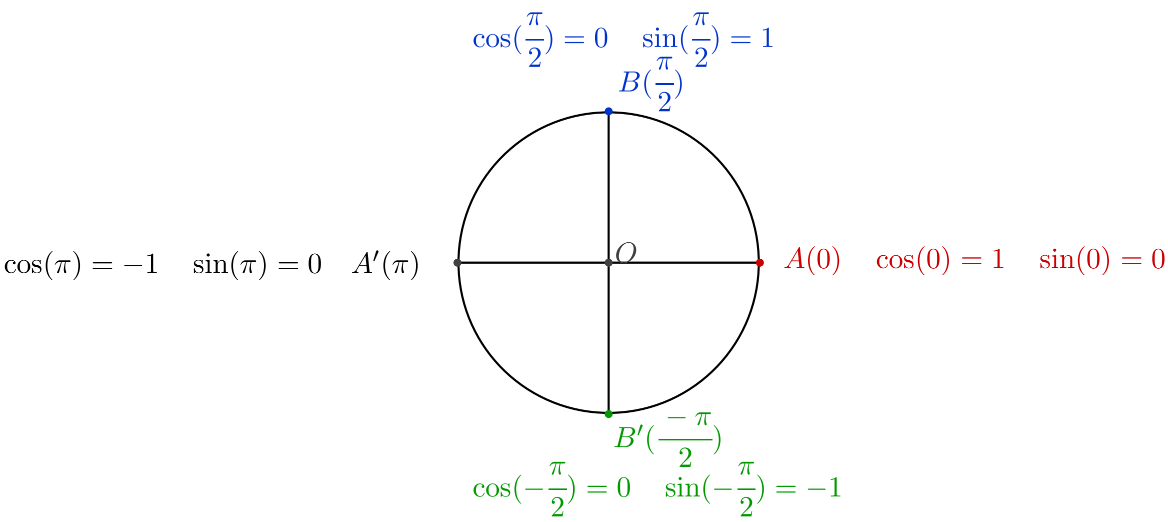
A tout réel α on associe un point M sur le cercle, alors :
$\cos\alpha$ est l'abscisse de M
$\sin\alpha$ est l'ordonnée de M
On note $M(\cos\alpha, \sin\alpha)$



Propriétés 2. $\forall\alpha \in \mathbb{R}, -1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$
$\alpha \in \mathbb{R}, -1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1$
$\alpha \in \mathbb{R}, \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
$\alpha \in \mathbb{R}, \cos(\alpha + k2\pi) = \cos\alpha$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}, \sin(\alpha + k2\pi) = \sin\alpha \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$

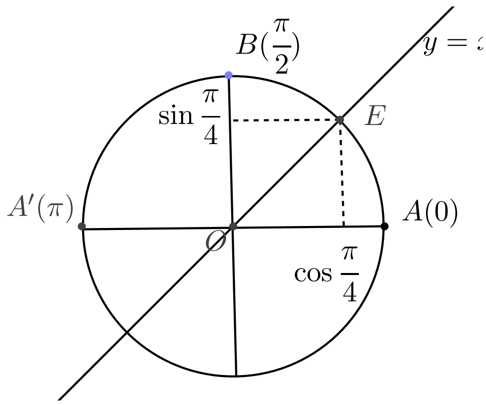
3.3 Valeurs particulières

- **pour** $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, -\frac{\pi}{2}$

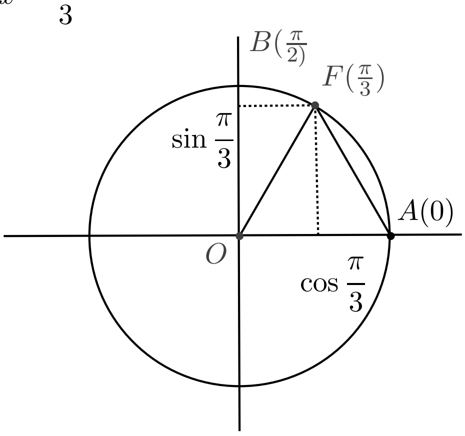


- **pour** $x = \frac{\pi}{4}$

E est situé sur la 1^{ere} bissectrice d'équation $y = x$.
Donc $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4}$ et d'autre part $\cos^2\frac{\pi}{4} + \sin^2\frac{\pi}{4} = 1$
On obtient $2\cos^2\frac{\pi}{4} = 1$ soit $\cos^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$
$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ car $\frac{\pi}{4} \in [0, \frac{\pi}{2}[$ donc $\cos\frac{\pi}{4} > 0$
On a donc $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$



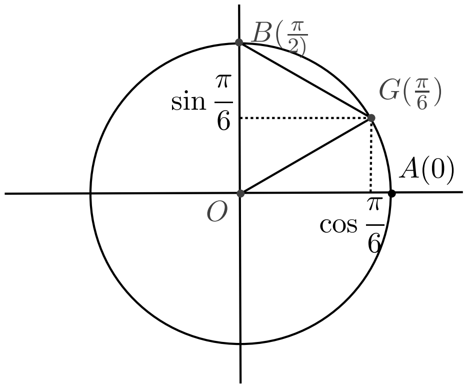
- **pour** $x = \frac{\pi}{3}$



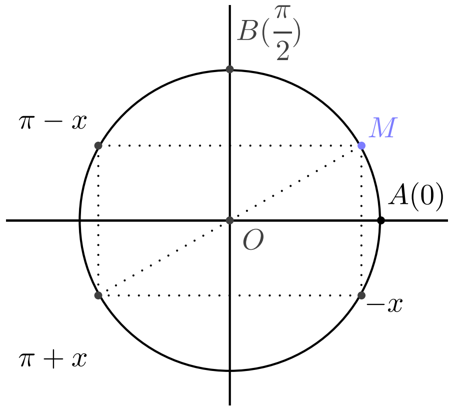
OAF est équilatéral (car isocèle avec un angle de 60°) donc sa hauteur issue de F est aussi médiatrice de $[OA]$ donc $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ et puisque $\cos^2\frac{\pi}{3} + \sin^2\frac{\pi}{3} = 1$, il vient que $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ car $\sin\frac{\pi}{3} > 0$
On a donc $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ **et** $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

- **pour** $x = \frac{\pi}{6}$

En raisonnant comme précédemment, OBG est équilatéral
On a donc $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ **et** $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$



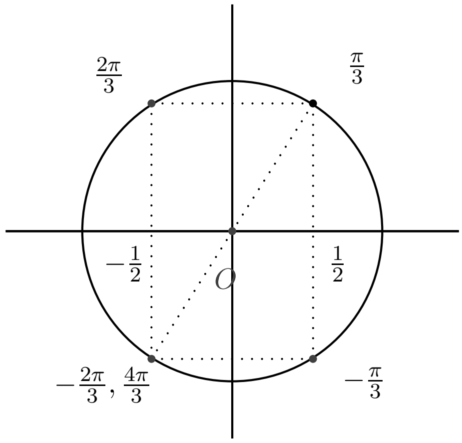
3.4 Configuration du rectangle



$\cos(\pi - x) = -\cos x$ $\qquad$ $\cos(\pi + x) = -\cos x$ $\qquad$ $\cos(-x) = \cos x$

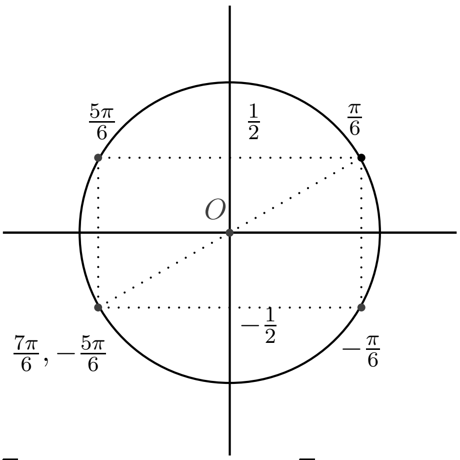
$\sin(\pi - x) = \sin x$ $\qquad$ $\sin(\pi + x) = -\sin x$ $\qquad$ $\sin(-x) = -\sin x$

APPLICATIONS :

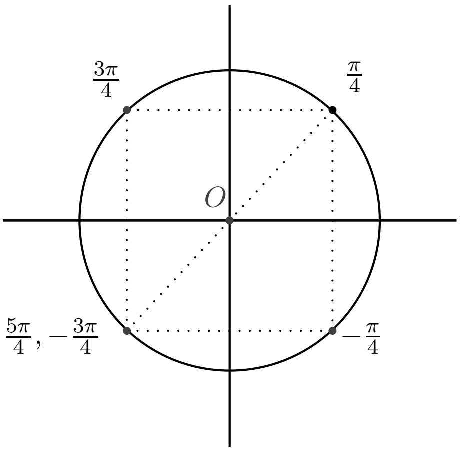


$\cos(\frac{2\pi}{3}) = -\cos(\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\cos(-\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\cos(-\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$

$\sin(\frac{2\pi}{3}) = \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $\sin(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $\sin(-\frac{2\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$



$$\cos(\frac{5\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos(-\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos(-\frac{5\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\sin(\frac{5\pi}{6}) = \frac{1}{2} \qquad \sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2} \qquad \sin(-\frac{5\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$$



$$\cos(\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos(-\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\sin(\frac{3\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sin(-\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sin(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

3.5 Configuration du triangle

M et M' sont symétriques par rapport à la 1^{ere} bissectrice d'équation $y = x$.

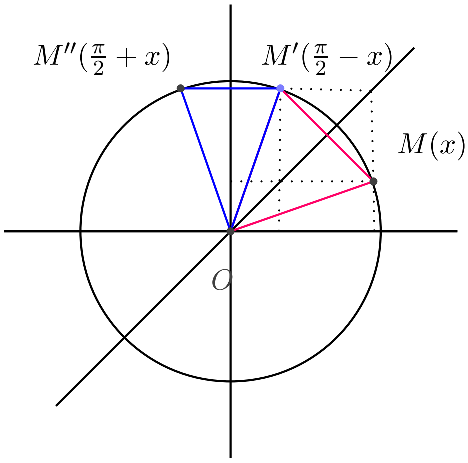
Donc $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$

$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$.

M' et M'' sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Donc $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\cos(\frac{\pi}{2} - x) = -\sin x$

$\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$.

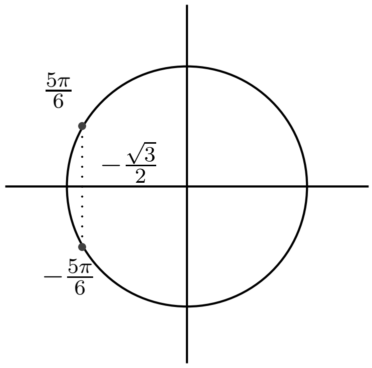


3.6 Equations

Exemples :

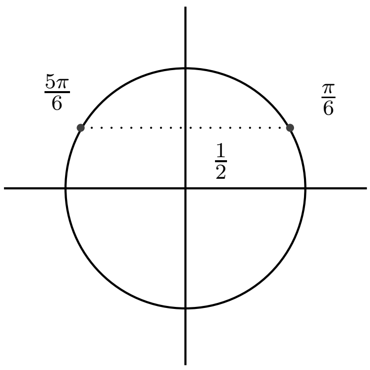
1. Résoudre $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\iff \left\{\begin{array}{c} x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. , k \in \mathbb{Z}$$

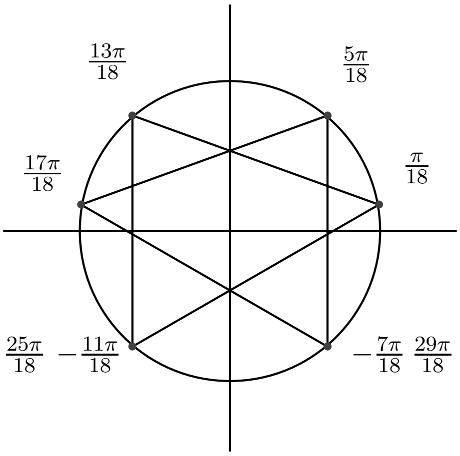


2. Résoudre $\sin 3x = \dfrac{1}{2}$

$$\sin 3x = \frac{1}{2}$$
$$\iff \left\{\begin{array}{c} 3x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \\ \text{ou} \\ 3x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. , k \in \mathbb{Z}$$
$$\iff \left\{\begin{array}{c} x = \dfrac{5\pi}{18} + k\dfrac{2\pi}{3} \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{\pi}{18} + k\dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right. , k \in \mathbb{Z}$$



Les solutions dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ sont :
$S_{[0,2\pi]} = \left\{ \frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}, \frac{17\pi}{18}, \frac{25\pi}{18}, \frac{29\pi}{18} \right\}$
Celles dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$ sont :
$S_{[-\pi,\pi]} = \left\{ -\frac{11\pi}{18}, -\frac{7\pi}{18}, \frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}, \frac{17\pi}{18} \right\}$



Celles dans l'intervalle $[-\pi, 3\pi]$ sont :
$S_{[-\pi,3\pi]} = \left\{ -\frac{11\pi}{18}, -\frac{7\pi}{18}, \frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}, \frac{17\pi}{18}, \frac{25\pi}{18}, \frac{29\pi}{18}, \frac{37\pi}{18}, \frac{41\pi}{18}, \frac{49\pi}{18}, \frac{53\pi}{18} \right\}$

3. **QCM**

Questions	**Réponses**
1. Si la droite a pour équation $x = 5$ alors cette droite est	☐ parallèle à l'axe des abscisses ☐ parallèles à l'axe des ordonnées ☐ quelconque
2. Deux droites parallèles ont des vecteurs directeurs	☐ opposés ☐ colinéaires ☐ inverse
3. Si $A(2;-1)$ et $B(-2;1)$ alors une équation de (AB) est	☐ $y = \frac{1}{2}x + 1$ ☐ $y = 2x$ ☐ $y = -\frac{1}{2}x$
4. Si $A(-2;-3)$ $B(2;3)$ $C(6,9)$ alors les coordonnées du centre de gravité sont	☐ $G(2;3)$ ☐ $G(3;2)$ ☐ $G(-2;2)$

4 Les exercices

1. Donner une mesure en radians des valeurs suivantes :
   a. 60° b. 270° c. 120° d. 300°

2. Déterminer :
   a. $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ b. $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ c. $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$
   d. $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ e. $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ f. $\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$

3. Sachant que $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$:
   (a) Déterminer $\cos x$ sachant que $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{3}$
   (b) Déterminer $\sin x$ sachant que $\cos x = -\frac{1}{2}$

4. Résoudre sur $[-\pi, \pi]$:
   a. $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ b. $\sin x = \frac{1}{2}$ c. $-\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ d. $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

5. Résoudre sur $[-\pi, 3\pi]$:
   a. $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ b. $\sin x = -\frac{1}{2}$ c. $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ d. $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

6. Résoudre sur $[-\pi, \pi]$:
   a. $\cos^2 x = \frac{1}{2}$ b. $4\sin^2 x - 3 = 0$ c. $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ d. $\sin 2x = \frac{1}{2}$

7. Résoudre sur $[-\pi, \pi]$:
   a. $\cos x \leqslant \frac{1}{2}$ b. $\sin x \geqslant 0$ c. $\sin x \cos x \geqslant 0$

8. **QCM**

Questions	**Réponses**
1. M est le point image du nombre réel $\frac{-\pi}{3}$ sur un cercle trigonométrique. M est aussi le point image de :	☐ $\frac{2\pi}{3}$ ☐ $\frac{5\pi}{3}$ ☐ $\frac{-5\pi}{3}$
2. $\sin\frac{2\pi}{3}$ est égal à	☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ☐ $\frac{\sqrt{3}}{2}$
3. $\cos\frac{15\pi}{6}$ est égal à	☐ 1 ☐ -1 ☐ 0
4. $\cos 3$ est	☐ positif ☐ négatif ☐ nul
5. Sachant que $\cos x = \frac{3}{5}$ et que $x \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ alors $\sin x$ vaut :	☐ $\frac{2}{5}$ ☐ $-\frac{4}{5}$ ☐ $\frac{4}{5}$

5 Les corrigés

1. a. $60° = \frac{\pi}{3} \quad rd$

   b. $270° = 3 \times 90° = 3 \times \frac{\pi}{2} \quad rd = \frac{3\pi}{2} \quad rd$

   c. $120° = 2 \times 60° = 2 \times \frac{\pi}{3} \quad rd = \frac{2\pi}{3} \quad rd$

   d. $300° = 10 \times 30° = 10 \times \frac{\pi}{6} \quad rd = \frac{5\pi}{3} \quad rd$

2. a. $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

   b. $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

   c. $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

   d. $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

   e. $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

   f. $\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\sin\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

3. On sait que $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ et on utilise la relation $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

   (a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ donc $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

   L'équation $\cos^2 x = \frac{2}{3}$ a deux solutions mais comme $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, on ne gardera que la solution négative, a savoir :
   $x = -\sqrt{\frac{2}{3}}$

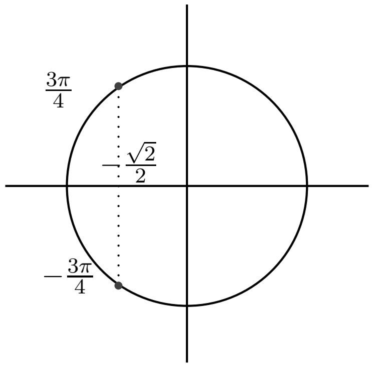
   (b) $\cos x = -\frac{1}{2}$ donc $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

   L'équation $\sin^2 x = \frac{2}{3}$ a deux solutions mais comme $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, on ne gardera que la solution positive, a savoir :
   $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

4. Résoudre sur $[-\pi, \pi]$:

   a. $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \iff \begin{cases} x = \dfrac{3\pi}{4} \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{3\pi}{4} \end{cases}$$



   On procède de la même façon :

   b. $\sin x = \dfrac{1}{2} \iff \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{5\pi}{6} \end{cases}$

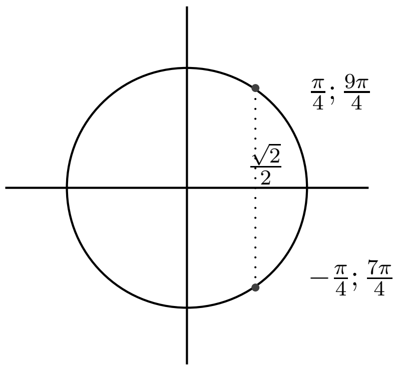
   c. $-\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \iff \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \iff \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{\pi}{6} \end{cases}$

   d. $\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \iff \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{4} \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{3\pi}{4} \end{cases}$

5. Résoudre sur $[-\pi, 3\pi]$:

   a. $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{4} \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{\pi}{4} \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{7\pi}{4} \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{9\pi}{4} \end{cases}$$



On procède de la même façon :

b. $\sin x = -\dfrac{1}{2}$

$$\iff \left\{\begin{array}{c} x = -\dfrac{5\pi}{6} \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{\pi}{6} \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{7\pi}{6} \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{11\pi}{64} \end{array}\right.$$

c. $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\iff \left\{\begin{array}{c} x = -\dfrac{5\pi}{6} \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{\pi}{6} \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{7\pi}{6} \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{11\pi}{64} \end{array}\right.$$

d. $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\iff \left\{\begin{array}{c} x = \dfrac{\pi}{3} \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{2\pi}{3} \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{7\pi}{3} \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{8\pi}{3} \end{array}\right.$$

6. Résoudre sur $[-\pi, \pi]$:

a. $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}$

$\cos^2 x = \dfrac{1}{2} \iff \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Soit $x = -\dfrac{3\pi}{4}$ ou $x = -\dfrac{\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{3\pi}{4}$

b. $4\sin^2 x - 3 = 0$

$4\sin^2 x - 3 = 0 \iff (2\sin x - \sqrt{3})(2\sin x + \sqrt{3}) = 0 \iff \sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Soit $x = -\dfrac{2\pi}{3}$ ou $x = -\dfrac{\pi}{3}$ ou $x = \dfrac{\pi}{3}$ ou $x = \dfrac{2\pi}{3}$

c. $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \iff x- = -\dfrac{5\pi}{6}$ ou $x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{5\pi}{6}$ soit $x = -\dfrac{7\pi}{12}$ ou $x = -\dfrac{13\pi}{12}$ mais sur $[-\pi, \pi]$ seul convient $x = -\dfrac{7\pi}{12}$

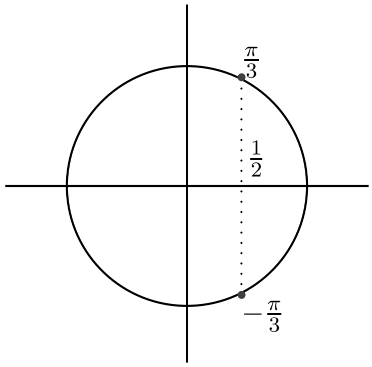
d. $\sin 2x = \dfrac{1}{2}$

$\sin 2x = \dfrac{1}{2} \iff 2x = \dfrac{\pi}{6}$ ou $2x = \dfrac{5\pi}{6}$

soit $x = \dfrac{\pi}{12}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{12}$

7. Résoudre sur $[-\pi, \pi]$:

   a. $\cos x \leqslant \dfrac{1}{2}$



   $\cos x \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

   $\iff x \in [-\pi; -\dfrac{\pi}{3}] \cup [-\pi; -\dfrac{\pi}{3}]$

   b.$\sin x \geqslant 0$

   $\sin x \geqslant 0 \iff x \in [0; \pi]$.

   c. $\sin x \cos x \geqslant 0$

   $\sin x \cos x \geqslant 0 \iff x \in [-\pi; -\dfrac{\pi}{2}] \cup [0; \dfrac{\pi}{2}]$

8. **QCM**

Questions	**Réponses**
1. M est le point image du nombre réel $\dfrac{-\pi}{3}$ sur un cercle trigonométrique. M est aussi le point image de :	☐ $\dfrac{2\pi}{3}$ ■ $\dfrac{5\pi}{3}$ ☐ $\dfrac{-5\pi}{3}$
2. $\sin \dfrac{2\pi}{3}$ est égal à	☐ $\dfrac{1}{2}$ ☐ $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ■ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
3. $\cos \dfrac{15\pi}{6}$ est égal à	☐ 1 ☐ -1 ■ 0
4. $\cos 3$ est	■ positif ☐ négatif ☐ nul
5. Sachant que $\cos x = \dfrac{3}{5}$ et que $x \in \left[\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right]$ alors $\sin x$ vaut :	☐ $\dfrac{2}{5}$ ■ $-\dfrac{4}{5}$ ☐ $\dfrac{4}{5}$