VECTEURS

Ph DEPRESLE

10 janvier 2017

Table des matières

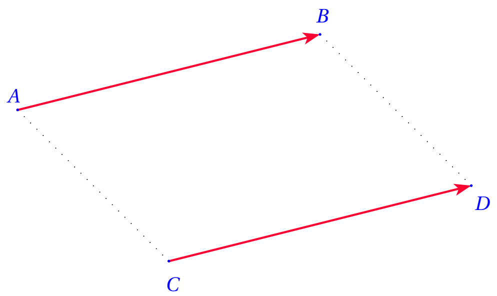
1 Notion de vecteur

1.1 Vecteur et translation

Définition 1. *Soient A et B deux points du plan.*
La translation qui transforme A en B associe à tout point C du plan le point D tel que les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu.
On dit que D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

1.2 Vecteur égaux

Définition 2. *Soit A, B, C, D quatre points du plan.*
Dire que les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux signifie qu'ils sont associés à la même translation, donc que les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu.



Propriétés 1. *Soit A, B, C, D quatre points du plan.*
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).

Propriétés 2.
Soit $\vec{u}$ un vecteur. Pour tout point M du plan, il existe un point unique M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.
M est l'image de O par la translation de vecteur $\vec{u}$.

1.3 Vecteur nul

Définition 3. *Lorsque les points A et B sont confondus, on dit que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur nul et on note $\vec{0}$ ce vecteur.*

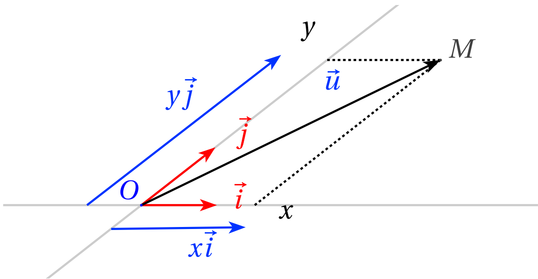
2 Coordonnées d'un vecteur dans un repère du plan

2.1 Repère du plan

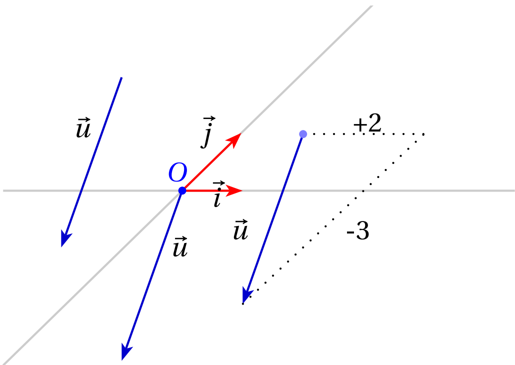
Soit (O, I, J) un repère du plan. Posons $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$.
Ce repère se note également $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

2.2 Coordonnées d'un vecteur

Définition 4.
Soit $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère du plan, $\vec{u}$ un vecteur du plan et M l'unique point tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.
Les coordonnées de $\vec{u}$ dans un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ sont les coordonnées de M dans ce repère.



Exemple : Représenter le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$



Propriétés 3. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. $\vec{u}=\vec{v}$ équivaut à $\begin{cases} x=x' \\ y=y' \end{cases}$.*

Propriétés 4. *Soit un plan muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, soient $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$, deux points du plan.*
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix}$

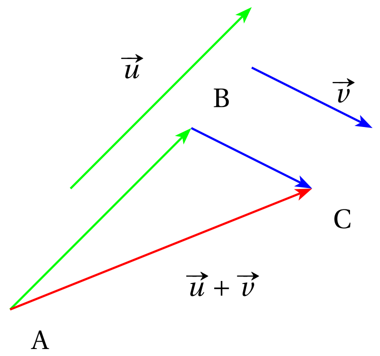
Exemple : Soient $A(2;-5)$ et $B(-3;3)$ deux points d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$,
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\vec{u}\begin{pmatrix} -5 \\ 8 \end{pmatrix}$.

3 Somme de deux vecteurs

Définition 5. *Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.*
On appelle somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le vecteur noté $\vec{u}+\vec{v}$, le vecteur associé à la translation résultant de la succession des translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Relation de Chasles.
Pour tous les points A, B et C du plan :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



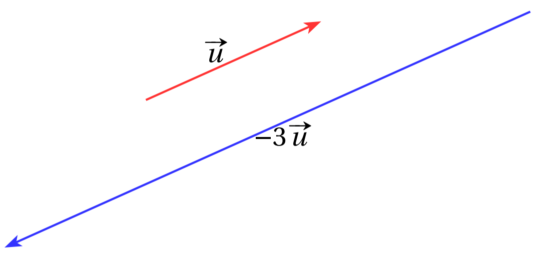
Règle du parallélogramme.
Pour tous points A, B, C, D du plan :
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.

Propriétés 5. *Pour tous les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ du plan :*

- $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$
- *Il existe un unique vecteur noté $-\vec{u}$ (opposé de $\vec{u}$) tel que $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$.*
  L'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $\overrightarrow{BA}$.

Propriétés 6. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$,*
Alors le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$.

4 Produit d'un vecteur par un réel et colinéarité



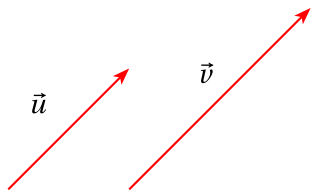
Définition 6. *Soit (O, I, J) un repère du plan, $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur et k un nombre réel.*
Le vecteur $k\vec{u}$ est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$ dans le repère (O, I, J).
On admet que le vecteur ainsi défini est indépendant du choix du repère.

Remarque :
Pour tout vecteur $\vec{u}$, $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$.

Propriétés 7. *Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ du plan, et tous nombres réels k, k' :*

- $k(\vec{u}+\vec{v}) = k\vec{u}+k\vec{v}$.
- $(k+k')\vec{u} = k\vec{u}+k'\vec{u}$.
- $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$
- $1\vec{u} = \vec{u}$
- $k\vec{u} = \vec{0} \iff k=0$ *ou* $\vec{u} = \vec{0}$

Définition 7. ***Vecteurs colinéaires***
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si l'un des deux vecteurs est nul, ou s'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.



$\vec{v} = \frac{3}{2}\vec{u}$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

Propriétés 8.
- *Soient quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $C \neq D$. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.*
- *Les points A, B, C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.*

Propriétés 9. ***Critère de colinéarité***
Dans un repère :
Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - yx' = 0$.

Démonstration

- ◇ Si l'un des vecteurs est nul, $\vec{u}$ par exemple alors $x = 0$ et $y = 0$ donc $xy' - yx' = 0$.
- ◇ Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

  On a donc $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $k\vec{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$ soit $x' = kx$ et $y' = ky$

  alors $\begin{array}{|c|c|} x & x' \\ \hline y & y' \end{array}$ est un tableau de proportionnalité et par conséquent $xy' - yx' = 0$. ▲

Exemple : Démontrer que les points $A(-3;-2)$ $B(3;1)$ et $D(5,2)$ sont alignés.

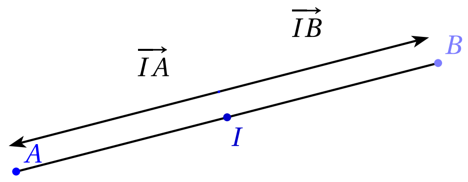
D'après l'exemple précèdent on a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$

Comme $6 \times 4 - 3 \times 8 = 0$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires donc les points $A(-3;-2), B(3;1)$ et $D(5,2)$ sont alignés.

5 Compléments

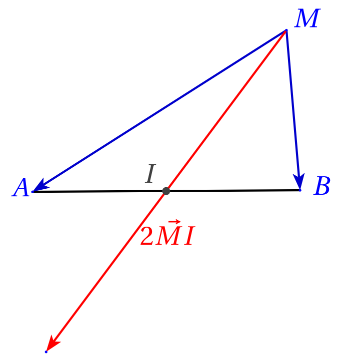
5.1 Caractérisation du milieu d'un segment

Propriétés 10. *Soit* $[AB]$ *un segment. Le point* I *est le milieu du segment* $[AB]$ *si et seulement si*
$\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{0}$ *ce qui équivaut à* $\overrightarrow{IB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.



Propriétés 11. *Pour tout point* M *du plan on a :* $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$ *où* I *est le milieu du segment* $[AB]$.

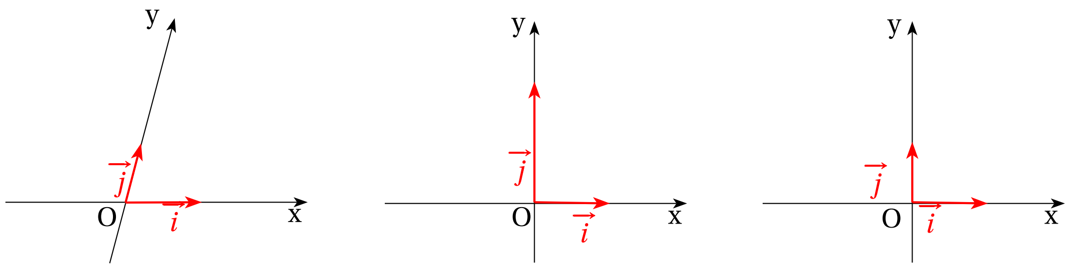
Remarque : $2\overrightarrow{MI}$ est porté par la diagonale du parallélogramme de centre I formé à partir de $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$.



Démonstration
$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})+(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})=2\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{0}=2\overrightarrow{MI}$ ▲

Remarque : Si $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ sont les coordonnées des points A et B alors les coordonnées de I sont $(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2})$.

5.2 Norme d'un vecteur dans un repère orthonormal



Repère quelconque Repère orthogonal Repère orthonormal

Soit un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

Définition 8. *Soit $\vec{u}$ un vecteur, A et B deux points du plan tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.*
On appelle norme du vecteur $\vec{u}$, que l'on note $\|\vec{u}\|$, la longueur du segment $[AB]$: $\|\vec{u}\| = AB$

Propriétés 12. ◇ $\|\vec{u}\| = 0$ *si et seulement si* $\vec{u} = \vec{0}$.

◇ *Pour tout vecteur $\vec{u}$ et tout réel k, on a $\|k\vec{u}\| = |k|\|\vec{u}\|$.*

◇ *Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$*

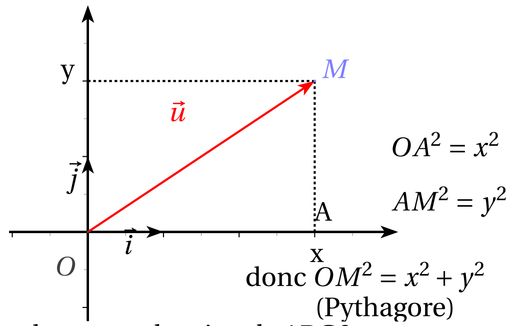
◇ $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Démonstration

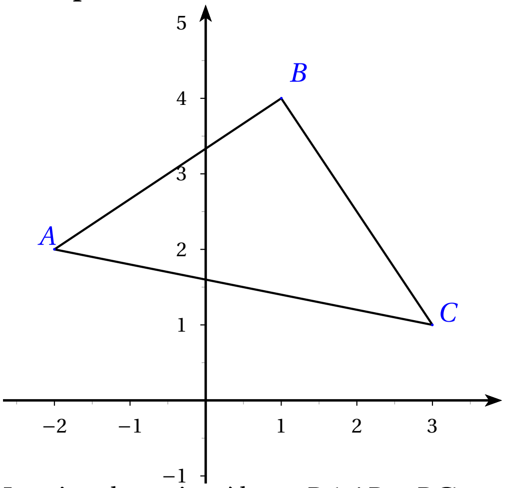
◇ Soit A un point du plan, $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$
donc $\|\vec{0}\| = AA = 0$

◇ Soit M un point du plan tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$,
$\|\vec{u}\| = OM = \sqrt{x^2+y^2}$

◇ On a vu que $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ et donc
$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ ▲



Exemple : On donne $A(-2;2), B(1;4)$ et $C(3;1)$. Quelle est la nature du triangle ABC ?



On a :
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1-(-2) \\ 4-2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$
soit $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$
$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 3-(-2) \\ 1-2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$
soit $AC = \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{5^2+(-1)^2} = \sqrt{26}$
$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 3-1 \\ 1-4 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$
soit $BC = \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{2^2+(-3)^2} = \sqrt{13}$

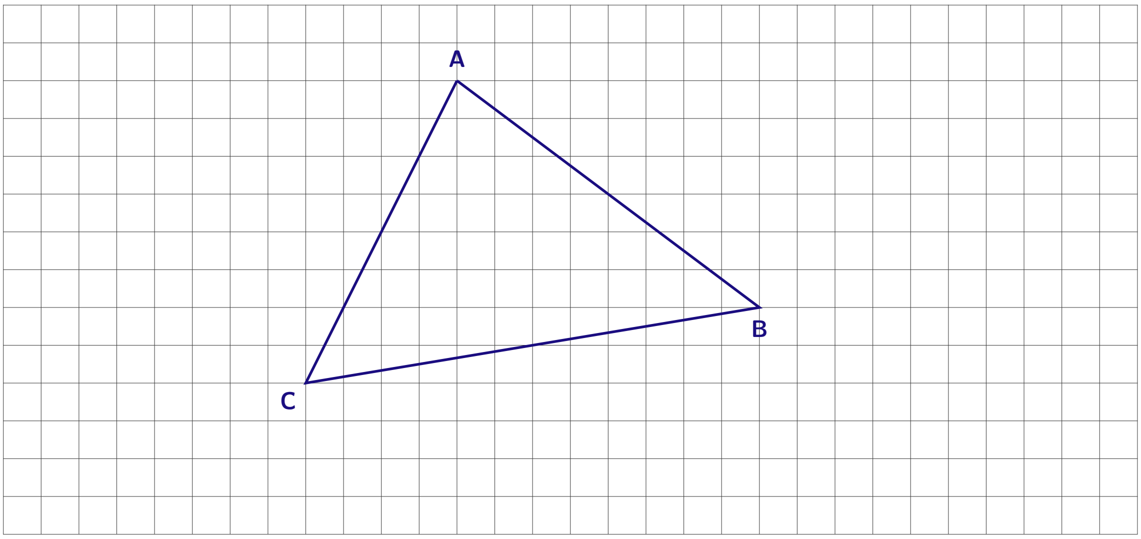
Le triangle est isocèle en B ($AB = BC$)
et d'après la réciproque de Pythagore, il est rectangle en B. ($AC^2 = AB^2 + BC^2$)
En conclusion le triangle ABC est rectangle isocèle en B.

6 Les exercices

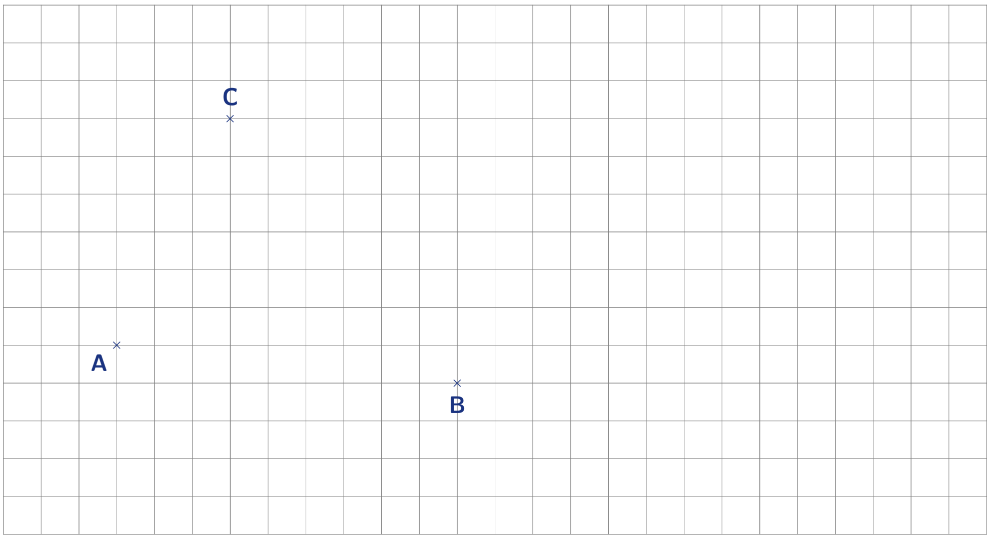
1. On considère un triangle ABC. Soit M le point du plan tel que $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

   (a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AM}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

   (b) Construire le point M dans la figure ci-dessous.



2. (a) Sur le dessin ci-dessous, placer les points M et N tels que $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.



   (b) Montrer que B est le milieu du segment $[AN]$.

3. Dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ on donne les points $A(-1;1)$, $B(2;1)$ et $C(-2;3)$

   (a) Déterminer les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{BC}$.

   (b) Déterminer les coordonnées du point P tel que $\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{BC}+\dfrac{3}{2}\overrightarrow{BP}=\vec{0}$.

   (c) Les points B, M et P sont-ils alignés ?

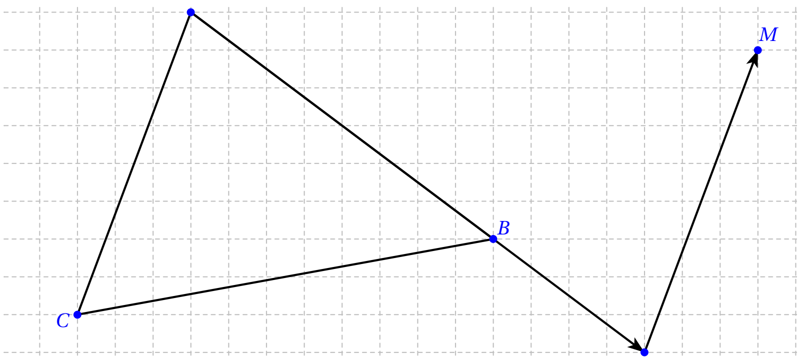
4. **QCM**

Questions	**Réponses**
1. Si $\vec{u} = -\dfrac{\sqrt{7}}{2}\vec{v}$ alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}$ sont	☐ égaux ☐ colinéaires ☐ quelconques
2. Deux vecteurs colinéaires ont	☐ des directions différentes ☐ même sens ☐ même direction
3. Si $A(2;-1)$ et $B(-2;1)$ alors	☐ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ☐ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ ☐ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$
4. Si M est le milieu de $[AB]$ alors	☐ $\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MB}$ ☐ $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$ ☐ - $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BM}$
5. Si $RATP$ est un parallélogramme alors	☐ $\overrightarrow{TA} = -\overrightarrow{PR}$ ☐ $\overrightarrow{PA} = -\overrightarrow{TR}$ ☐ $\overrightarrow{RA} = -\overrightarrow{TP}$

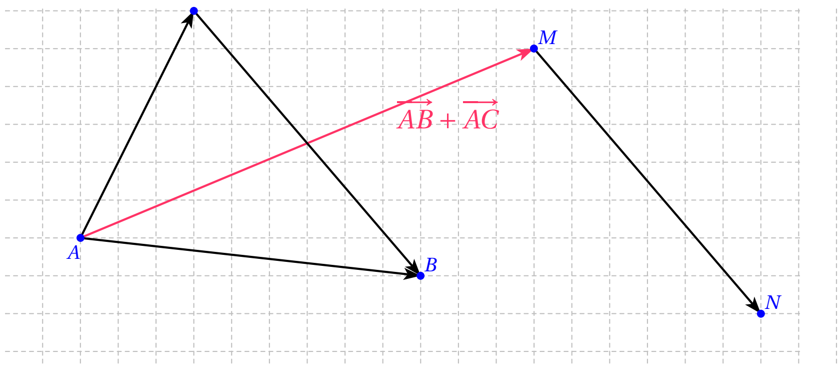
7 Les exercices corrigés

1. (a) Soit M le point du plan tel que $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{0}$.
   On utilise la relation de Chasles et on a :
   $\overrightarrow{MA}+3(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB})-2(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{0}$
   $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}$
   $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}$
   Soit $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{AC}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et enfin $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.

   (b) On obtient :



2. (a) Pour le point M as de problème c'est une somme de deux vecteurs.
   Pour le point N On transforme $\overrightarrow{MN}$ en écrivant :
   $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}$
   On obtient :



   (b) $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ donc $ACMB$ est un parallélogramme et donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CM}$.
   $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{CB}$ donc $CMNB$ est un parallélogramme et donc $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{CM}$.
   On a $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{CM}$ soit $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BN}$.
   Ce qui prouve que B est le milieu de $[AN]$.

3. Dans le plan muni d'un repère $(O;\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$ on donne les points $A(-1;1)$, $B(2;1)$ et $C(-2;3)$

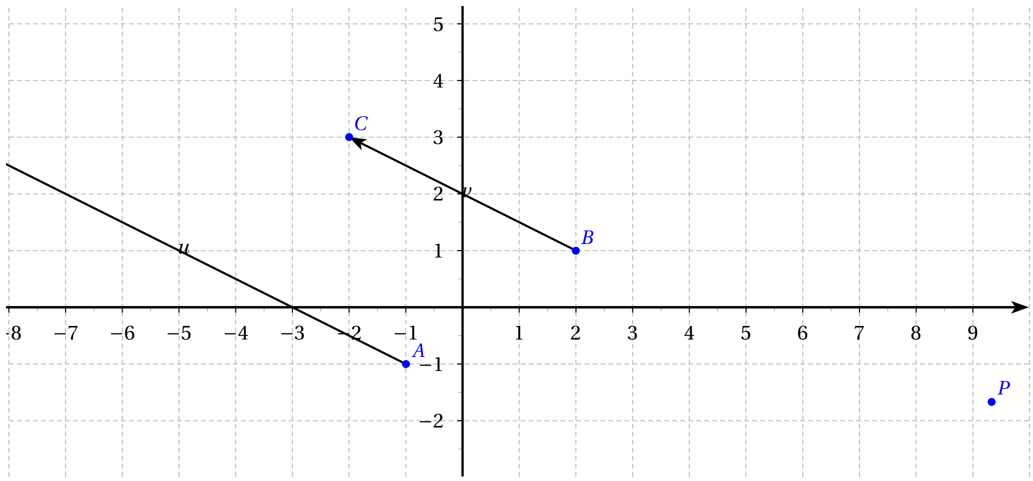
   (a) $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$ et donc $2\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-8\\4\end{pmatrix}$.

Soit $M(x; y)$ l'égalité $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{BC}$ permet d'écrire :
$\begin{cases} x+1=-8 \\ y-1=4 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x=-9 \\ y=5 \end{cases}$ et on a donc $M(-9;5)$.

(b) pour déterminer les coordonnées du point P tel que $\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BP} = \vec{0}$ on calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $2\overrightarrow{BC}$ puis on résout le système :
$\begin{cases} -3-8+\frac{3}{2}(x-2)=0 \\ 0+4+\frac{3}{2}(y-1)=0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x=\frac{28}{3} \\ y=-\frac{5}{3} \end{cases}$.

(c) On a $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} -11 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BP}\begin{pmatrix} \frac{22}{3} \\ -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$.

La condition de colinéarité est vérifiée ($-11 \times -\frac{8}{3} - 4 \times \frac{22}{3} = 0$)
Donc les points B, M et P sont alignés.



4. **QCM**

Questions	**Réponses**
1. Si $\vec{u} = -\frac{\sqrt{7}}{2}\vec{v}$ alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}$ sont	☐ égaux ■ colinéaires ☐ quelconques
2. Deux vecteurs colinéaires ont	☐ des directions différentes ☐ même sens ■ même direction
3. Si $A(2;-1)$ et $B(-2;1)$ alors	☐ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ ■ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$ ☐ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$
4. Si M est le milieu de $[AB]$ alors	■ $\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MB}$ ☐ $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$ ☐ - $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BM}$
5. Si $RATP$ est un parallélogramme alors	☐ $\overrightarrow{TA} = -\overrightarrow{PR}$ ☐ $\overrightarrow{PA} = -\overrightarrow{TR}$ ■ $\overrightarrow{RA} = -\overrightarrow{TP}$