NOMBRES COMPLEXES

Ph DEPRESLE

11 janvier 2016

Table des matières

1 Les nombres complexes-Forme algébrique d'un nombre complexe **2**

2 Opérations dans l'ensemble $\mathbb{C}$ **2**
- 2.1 Addition dans $\mathbb{C}$ 2
- 2.2 Multiplication dans $\mathbb{C}$ 2

3 Les nombres complexes conjugués **3**
- 3.1 Définition 3
- 3.2 Conjugaison et opérations 3

4 Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ $(a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ **3**
- 4.1 Résolution de l'équation $z^2 = a$ $\quad a \in \mathbb{R}$ 3
- 4.2 Résolution de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ $(a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ 4

5 Représentations géométriques des nombres complexes **4**

6 Module d'un nombre complexe **5**

7 Argument d'un nombre complexe-Forme trigonométrique **5**
- 7.1 Argument 5
- 7.2 Forme trigonométrique 6
- 7.3 Arguments et produit 7

8 Notation exponentielle des nombres complexes **7**

9 QCM **9**

10 EXERCICES : Les exercices de base **10**

11 EXERCICES : Les exercices de base (corrigés) **12**

1 Les nombres complexes-Forme algébrique d'un nombre complexe

Définition 1. *On appelle nombre complexe, un nombre qui s'écrit de façon unique sous la forme* $z = a + ib$ *dans lequel* a *et* b *sont des réels et* i *un élément vérifiant* $i^2 = -1$.
a *est appelé la partie réelle de* z *et* b *la partie imaginaire de* z.
Cette écriture est appelée forme algébrique du nombre complexe z.
L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.
On notera indifféremment $a + ib$ *ou* $a + bi$

Notation :$a = Re(z)$ et $b = Im(z)$

Exemple : $1-2i$; $\sqrt{2}-3i$ sont des nombres complexes.
$Re(1-2i) = 1$ et $Im(1-2i) = -2$.

Remarques :

- $Re(z)$ et $Im(z)$ sont des nombres réels.
- Parmi les complexes il y a les réels (qui s'écrivent a + i × 0).
  donc $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ et de plus ; $z \in \mathbb{R} \iff Im(z) = 0$
- Parmi les complexes il y a les imaginaires purs (qui s'écrivent 0 + i × b).
  z imaginaire pur $\iff Re(z) = 0$
- 0 est à la fois réel et imaginaire pur.
- Deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

2 Opérations dans l'ensemble $\mathbb{C}$

On définit sur $\mathbb{C}$ une addition et une multiplication ayant les mêmes propriétés que celles des nombres réels.

2.1 Addition dans $\mathbb{C}$

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ (a, b, a', b' réels) on pose :
$z + z' = (a+ib)+(a'+ib') = (a+a')+i(b+b')$. On additionne les parties réelles d'une part et les parties imaginaires d'autre part.
$z - z' = (a+ib) - (a'+ib') = (a-a') + i(b-b')$.
Exemple : 2 + 5i + 8 - 3i = 10 + 2i

2.2 Multiplication dans $\mathbb{C}$

On utilise les règles de $\mathbb{R}$, la distributivité et $i^2 = -1$.
$z.z' = (a+ib)(a'+ib') = aa' + i^2bb' + i(ab' + ba')$
$z.z' = (a+ib)(a'+ib') = aa' - bb' + i(ab' + ba')$
Exemples

1. $z = 1+3i$; $z' = 2-i$; $zz' = 5+5i$.
2. $z = 4i$; $z' = 2-\sqrt{2}i$; $zz' = 4\sqrt{2}+8i$.

Identités remarquables :

$$(a+ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab$$
$$(a-ib)^2 = a^2 - b^2 - 2iab \qquad \text{avec } a, b \in \mathbb{R}$$
$$(a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}^+$$

Exemple de calcul : Mettre sous forme algébrique le nombre complexe : $\dfrac{2+5i}{8-3i}$

$\dfrac{2+5i}{8-3i} = \dfrac{(2+5i)(8+3i)}{(8-3i)(8+3i)} = \dfrac{1+46i}{64+9} = \dfrac{1}{73} + \dfrac{46}{73}i.$

3 Les nombres complexes conjugués

3.1 Définition

Définition 2. *Soit $z = a + ib$ (a, b réels) un nombre complexe, on appelle nombre conjugué du nombre z, et on note $\overline{z}$, le nombre complexe $\overline{z} = a - ib$.*

Remarques :

- $\overline{(\overline{z})} = \overline{a - ib} = a + ib = z$.
  Le conjugué de $\overline{z}$ est z. On dit que $\overline{z}$ et z sont conjugués.

$$\overline{(\overline{z})} = z$$

- $\begin{cases} z = a+ib \\ \overline{z} = a-ib \end{cases} \iff \begin{cases} z+\overline{z} = 2a \\ z-\overline{z} = 2ib \end{cases}$

$$\forall z \in \mathbb{C}$$
$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2} \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$$
$$z \text{ réel} \iff \overline{z} = z$$
$$z \text{ imaginaire pur} \iff \overline{z} = -z$$

3.2 Conjugaison et opérations

Propriétés 1. *Quels que soient les nombres complexes z, z' :*

1. $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
2. $\overline{z.z'} = \overline{z}.\overline{z'}$
3. *Si z' est non nul,* $\overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z'}}$ *et* $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$
4. $z.\overline{z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}^+$

4 Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$)

4.1 Résolution de l'équation $z^2 = a$ $\qquad a \in \mathbb{R}$

- Si $a > 0$, $z^2 = a$ admet 2 racines réelles opposées $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$
- Si $a = 0$, $z^2 = 0$ admet 1 seule racine $z = 0$.
- Si $a < 0$, $z^2 = a$ admet 2 racines imaginaires pures conjuguées $i\sqrt{|a|}$ et $-i\sqrt{|a|}$

4.2 Résolution de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$)

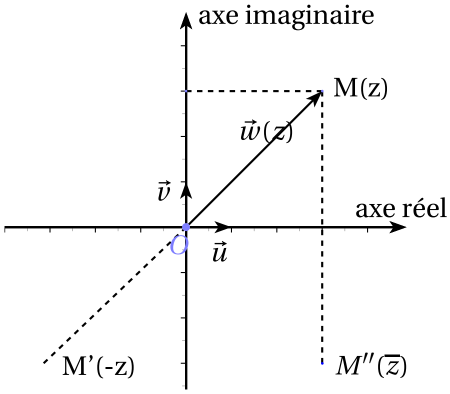
Propriétés 2. *Si z_0 est solution de l'équation, $\overline{z_0}$ est aussi solution.*

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + 3z + 4 = 0$
Solution :
On calcule le discriminant $\Delta = 9 - 16 = -7 = (i\sqrt{7})^2$.
L'équation admet donc deux solutions complexes conjuguées :
$z_1 = \dfrac{-3 + i\sqrt{7}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{-3 - i\sqrt{7}}{2}$

5 Représentations géométriques des nombres complexes

Le plan est rapporté à un repère orthonormé$(O; \vec{u}, \vec{v})$;
$z = a + ib$ est représenté par le point $M(a, b)$.
$a, b \in \mathbb{R}$
On dit que $\left.\begin{array}{c} M \text{ est l'image de } z \\ z \text{ est l'affixe de } M \end{array}\right)$ on note $M(z)$.
De même, si $\vec{w}$ est un vecteur, $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$

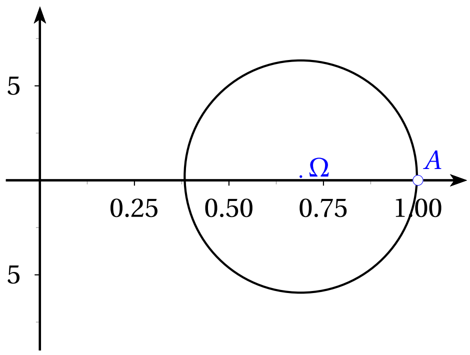
On dit que $\left.\begin{array}{c} \vec{w} \text{ est l'image de } z \\ z \text{ est l'affixe de } \vec{w} \end{array}\right)$ on note $\vec{w}(z)$.



Propriétés 3.
1. *Les images de z et $-z$ sont symétriques par rapport à O.*
2. *Les images de z et $\overline{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des réels.*
3. *Si $\overrightarrow{W}$ et si $\overrightarrow{W'}$ ont comme affixes respectives z et z', alors $\overrightarrow{W} + \overrightarrow{W'}$ a pour affixe $z + z'$.*
4. *Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et si $\vec{w}$ a pour affixe z, alors $\lambda\overrightarrow{W}$ a pour affixe λz.*
5. *Si A et B ont pour affixes respectives z_A et z_B, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ a pour affixe $z_B - z_A$.*
6. *Si A et B ont pour affixes respectives z_A et z_B, alors le milieu de $[AB]$ a pour affixe $\dfrac{z_A + z_B}{2}$.*

Exercice : Trouver l'ensemble des points M d'affixe z tel que $Z = \dfrac{5z-2}{z-1}$ soit un imaginaire pur.
Z imaginaire pur $\Leftrightarrow Z = -\overline{Z}$ et $z \neq 1$
$\Leftrightarrow \dfrac{5z-2}{z-1} = -\dfrac{5\overline{z}-2}{\overline{z}-1}$ et $z \neq 1$
$\Leftrightarrow (5z-2)(\overline{z}-1) = -(z-1)(5\overline{z}-2)$ et $z \neq 1$
$\Leftrightarrow 10z\overline{z} - 7(z+\overline{z}) + 4 = 0$ et $z \neq 1$
$\Leftrightarrow 10(x^2+y^2) - 14x + 4 = 0$ et $(x, y) \neq (1, 0)$ avec $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{7}{5}x + \frac{2}{5} = 0$ et $(x, y) \neq (1, 0)$
$\Leftrightarrow \left(x - \dfrac{7}{10}\right)^2 + y^2 = \dfrac{9}{100}$ et $(x, y) \neq (1, 0)$

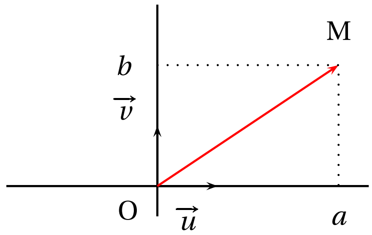
C'est le cercle de centre Ω d'affixe $\dfrac{7}{10}$ et de rayon $\dfrac{3}{10}$ privé du point A d'affixe 1.



6 Module d'un nombre complexe

Définition 3. *Soit $z = a + ib$, avec a et b réels. Le module de z est le réel :* $|z| = z\overline{z} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Théorème 1. *Soit z un nombre complexe et M et $\overrightarrow{w}$ ses images dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.*
Alors $OM = |z|$ *et* $\|\overrightarrow{w}\| = |z|$.



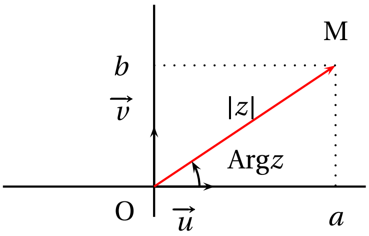
Propriétés 4. *Les nombres z et z′ sont des nombres complexes quelconques :*

1. *Un nombre complexe est nul si, et seulement si, son module est nul, c'est-à-dire :* $z = 0$ *équivaut à* $|z| = 0$.
2. *Le module d'un nombre complexe est égal au module de son conjugué* $|\overline{z}| = |z|$
3. *Le module du produit de deux nombres complexes est égal au produit de leurs modules :* $|z.z'| = |z|.|z'|$
4. *Le module de l'inverse d'un nombre complexe non nul est l'inverse de son module et le module du quotient de deux nombres complexes est le quotient de leurs modules.*
   pour $z' \neq 0$: $|\frac{1}{z'}| = \frac{1}{|z'|}$ *et* $|\frac{z}{z'}| = \frac{|z|}{|z'|}$
5. *Inégalité triangulaire : Le module d'une somme de deux nombres complexes est inférieur ou égal à la somme de leurs modules :* $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$
6. *Pour tout naturel n, on a* $|z^n| = |z|^n$.

7 Argument d'un nombre complexe-Forme trigonométrique

7.1 Argument

Définition 4. *Soit z un nombre complexe non nul et M son image dans le plan complexe muni du repère orthonormal direct* $(0; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
On appelle argument du complexe z, noté $Arg(z)$ *toute mesure de l'angle orienté* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})$.



Le nombre complexe 0 n'a pas d'argument.

7.2 Forme trigonométrique

Soit z le nombre complexe $a+ib$ où a et b sont deux réels pas tous les deux nuls.
Soit M son image dans le plan complexe .
Si on désigne par r le module de z (en fait $r=|z|$) et θ un argument de z, on a :
$\begin{cases} a = r\cos\theta \\ b = r\sin\theta \end{cases}$, on a donc $z = r\cos\theta + ir\sin\theta$ soit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

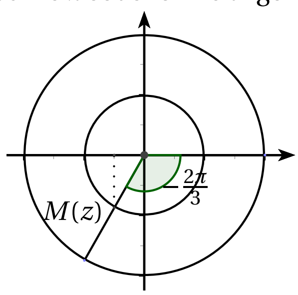
Définition 5. *Soit z un nombre complexe non nul de module r et d'argument θ.*
L'expression $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ est l'expression trigonométrique de z.

Deux nombres complexes non nuls sont égaux si, et seulement s'ils ont le même module et des arguments égaux à $k2\pi$ près (k entier).

Exercice : Soit $z = -2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Calculer le module et un argument de z et écrire z sous forme trigonométrique.

Solution : $|z| = 2$ donc $z = 2\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et Arg $z = -\frac{2\pi}{3}+k2\pi$

$z = 2(\cos-\frac{2\pi}{3}+i\sin-\frac{2\pi}{3})$ est la forme trigonométrique de z.



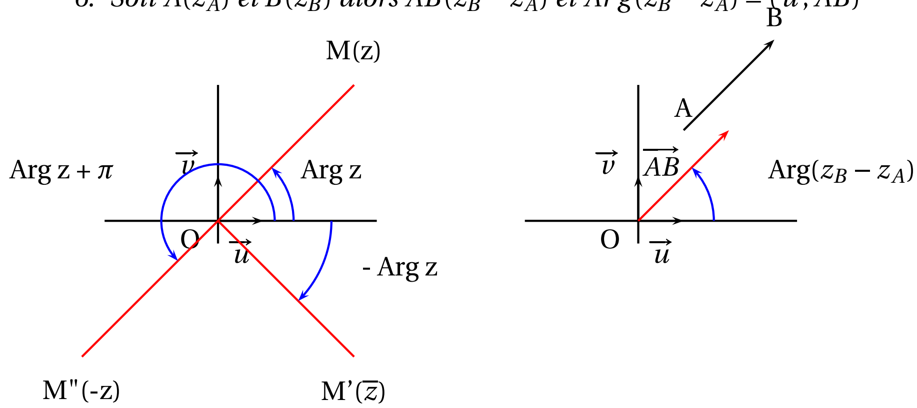
Remarque Pour obtenir la forme trigonométrique du nombre complexe $z = \sin\alpha + i\cos\alpha$ $\alpha \in \mathbb{R}$, il faut transformer l'écriture de z.

$\sin\alpha = \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)$ et $\cos\alpha = \sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)$ Ce qui permet d'écrire :

$z = \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)+i\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)$ qui est la forme trigonométrique de z.

Propriétés 5.
1. *Tout réel strictement positif a un argument égal à 0.*
   $z \in R_*^+ \iff Arg(z) = 0+k2\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$
2. *Tout réel strictement négatif a un argument égal à π.*
   $z \in R_*^- \iff Arg(z) = \pi+k2\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$
3. *z imaginaire pur non nul* $\iff Arg(z) = \frac{\pi}{2}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

4. *$M(z)$ et $M'(\overline{z})$ sont symétriques par rapport à l'axe des réels*
   donc $Arg\overline{z} = -Arg z + k2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$
5. *$M(z)$ et $M"(-z)$ sont symétriques par rapport à l'origine*
   donc $Arg(-z) = Arg z + \pi + k2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$
6. *Soit $A(z_A)$ et $B(z_B)$ alors $\overrightarrow{AB}(z_B - z_A)$ et $Arg(z_B - z_A) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB})$*



7.3 Arguments et produit

Propriétés 6. 1. *Un argument du produit de deux nombres complexes est la somme de deux arguments de ces nombres, c'est-à-dire :*

$$Arg(zz') = Arg z + Arg z' + k2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

2. *Un argument de l'inverse d'un nombre complexe est l'opposé d'un argument de ce nombre :*

$$Arg(\frac{1}{z}) = -Arg z + k2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

3. *Un argument du quotient de deux nombres complexes est la différence entre un argument du numérateur et un argument du dénominateur :*

$$Arg(\frac{z}{z'}) = Arg(z) - Arg(z') + k2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

4. *Formule de Moivre : Pour tout entier n :*

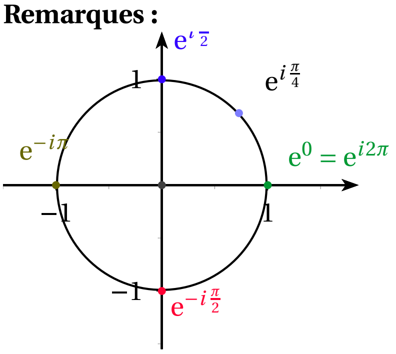
$$Arg z^n = n Arg z + k2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

8 Notation exponentielle des nombres complexes

La fonction $\theta \mapsto \cos\theta + i\sin\theta$ vérifie la propriété caractéristique de l'exponentielle.

Définition 6. *On note pour $\theta \in \mathbb{R}$: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.*

Remarques :



$$e^{i0} = e^{i2\pi} = 1\ ;\ e^{i\pi} = -1\ ;\ e^{i\frac{\pi}{2}} = i\ ;\ e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$$

Propriétés 7. *On a les propriétés suivantes :*

$$|e^{i\theta}| = 1 \qquad e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Leftrightarrow \theta = \theta' + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$e^{i(\theta+k2\pi)} = e^{i\theta} \qquad \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \qquad e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$$

$$\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \qquad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')} \qquad \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}, n \in \mathbb{Z}$$

Définition 7. *Tout nombre complexe non nul s'écrit $z = re^{i\theta}$ où $r = |z|$ et θ est un argument de z. C'est la forme exponentielle de z.*

Exemples :

1. $z = 1 + i$, on a $|z| = \sqrt{2}$ et $\text{Arg} z = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi$

   z peut s'écrire $z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ est la forme exponentielle de $1 + i$.

2. $z = -1 - i\sqrt{3}$, on a $|z| = 2$ soit $z = 2\left(-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\text{Arg} z = \dfrac{-2\pi}{3} + k2\pi$

   z peut s'écrire $z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{-2\pi}{3} + i\sin\dfrac{-2\pi}{3}\right) = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

De façon analogue aux propriétés précédentes, on a :

$$re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$$

$$\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$$

$$\left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta}, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

9 QCM

1. Démontrer que pour tout nombre complexe z :
   $z+\overline{z}=2\text{Re}(z)$ et $|\text{Re}(z)|\leqslant|z|$.
2. Démontrer que pour tous les nombres complexes z_1 et z_2 :
   $|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2$.
   En déduire l'inégalité triangulaire : $|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$

Solution

1. Écrivons z sous forme algébrique : $z=x+i\,y$, avec x et y réels.
   • $z+\overline{z}=(x+i\,y)+(x-i\,y)=2x=2\text{Re}(z)$.
   • $x^2\leqslant x^2+y^2$, donc $|x|\leqslant\sqrt{x^2+y^2}$,
   ce qui équivaut à : $|\text{Re}(z)|\leqslant|z|$
2. $|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})=z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}$
   $|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2$.
   $|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2\text{Re}(z_1\overline{z_2})$ (d'après le 1.)
   $|z_1+z_2|^2\leqslant|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1\overline{z_2}|$ (d'après le 1.)
   $|z_1+z_2|^2\leqslant|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1z_2|$
   $|z_1+z_2|^2\leqslant(|z_1|+|z_2|)^2$
   On a démontré que $|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$.

10 EXERCICES : Les exercices de base

Exercice 1
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z = \dfrac{6-z}{3-z}$.

Exercice 2
Quel est l'ensemble de points M d'affixe $z = x + yi$ du plan complexe vérifiant
$|z-1| = |z+i|$?

Exercice 3
On considère, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation suivante :

$$(E) \qquad (z-2)(z^2+4z+8) = 0.$$

1. Donner les solutions de (E) sous forme algébrique.
2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct.
   Placer dans le plan les images des solutions de (E). Montrer qu'on obtient un triangle isocèle.
3. Calculer l'aire de ce triangle.

Exercice 4
Dans un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère le point A d'affixe $z_A = 1$ et le point B d'affixe $z_B = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Vérifier que $z^4 + z^2 + 1 = (z^2+1)^2 - z^2$.
2. En déduire les solutions de l'équation $z^4 + z^2 + 1 = 0$.
   Donner pour chacune son module et un argument.
3. Déterminer les affixes des points C, D, E, F tels que :
   $z_F = \overline{z_B} \quad z_C = -z_F \quad z_D = -z_A \quad z_E = -z_B$. Placer ces points.
4. Démontrer que ces points appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.
5. Quelle est la nature du triangle CEA ? En déduire une mesure de $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CE})$.

Exercice 5
On considère la suite (z_n) à termes complexes définie par $z_0 = 1 + \mathrm{i}$ et, pour tout entier naturel n, par

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{3}.$$

Pour tout entier naturel n, on pose : $z_n = a_n + \mathrm{i}b_n$, où a_n est la partie réelle de z_n et b_n est la partie imaginaire de z_n. Le but de cet exercice est d'étudier la convergence des suites (a_n) et (b_n).

1. Pour tout entier naturel n, exprimer z_{n+1} en fonction de a_n et b_n. En déduire l'expression de a_{n+1} en fonction de a_n et b_n, et l'expression de b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
2. Quelle est la nature de la suite (b_n) ? En déduire l'expression de b_n en fonction de n, et déterminer la limite de (b_n).

3. (a) On rappelle que pour tous nombres complexes z et z' :

$$\left|z+z'\right| \leqslant |z|+\left|z'\right| \qquad \text{(inégalité triangulaire).}$$

Montrer que pour tout entier naturel n,

$$|z_{n+1}| \leqslant \frac{2|z_n|}{3}.$$

(b) Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$u_n \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}.$$

En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite que l'on déterminera.

(c) Montrer que, pour tout entier naturel n, $|a_n| \leqslant u_n$. En déduire que la suite (a_n) converge vers une limite que l'on déterminera.

Exercice 6

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}\,\vec{v})$.

Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe $z_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}}$.

1. Représenter les points $A_0, A_1, \ldots, A_5$.
2. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles A_n est un point de l'axe des ordonnées.
3. Démontrer que pour tout entier n, $z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right) z_n$.
4. Vérifier que la suite définie par $u_n = A_nA_{n+1}$ est géométrique.
5. Calculer la longueur de la ligne brisée $\ell_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \cdots + A_nA_{n+1}$.
   Quelle est la limite de ℓ_n ?

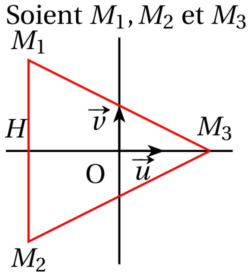
11 EXERCICES : Les exercices de base (corrigés)

Exercice 1 :
Pour $z \neq 3$ (E) équivaut à $z(3-z) = 6-z$ donc à $z^2 - 4z + 6 = 0$.
Le discriminant de cette équation est $\Delta = 16 - 24 = -8 = (2\sqrt{2}i)^2$.
(E) admet deux solutions complexes non réelles :
$z_1 = \dfrac{4+2\sqrt{2}i}{2} = 2 + \sqrt{2}i \quad \text{et} \quad z_2 = \overline{z_1} = 2 - \sqrt{2}i$.

Exercice 2 :
$|z-1| = |z+i|$ équivaut à $|x+iy-1|^2 = |x+iy+i|^2$.
Ceci équivaut à $(x-1)^2 + y^2 = x^2 + (y+1)^2$
donc à $x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 + y^2 + 2y + 1$.
L'ensemble cherché est la droite d'équation $y = -x$.
Remarque :
Si on appelle A le point d'affixe 1 et B le point d'affixe $-i$, $|z-1| = |z+i|$ signifie que le point M est équidistant de A et B. L'ensemble cherché est donc la médiatrice du segment $[AB]$. C'est bien une droite.

Exercice 3 :

1. On cherche les solutions de (E') $\qquad z^2 + 4z + 8 = 0$.
   $\Delta = 16 - 32 = -16 = (4i)^2$.
   (E') a deux solutions : $z_1 = \dfrac{-4+4i}{2} = -2+2i \quad \text{et} \quad z_2 = \overline{z_1} = -2-2i$.
   Or (E) peut s'écrire $z - 2 = 0$ ou $z^2 + 4z + 8 = 0$, car un produit de nombres complexes est nul si et seulement si l'un au moins de ces nombres est nul.
   Les solutions de (E) sont donc $-2+2i$, $-2-2i$, 2.
2. Soient M_1, M_2 et M_3 les points d'affixes $z_1 = -2+2i$, $z_2 = -2-2i$ et $z_3 = 2$.



z_1 et z_2 sont des complexes conjugués, donc leurs images M_1 et M_3 sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Comme M_3 appartient à cet axe, le triangle $M_1M_2M_3$ est isocèle en M_3.

3. Soit H le pied de la hauteur issue de M_3 : c'est le milieu de $[M_1M_2]$.
   L'affixe de H est $\dfrac{1}{2}(z_1 + z_2) = -2$.
   Or $M_1M_2 = |z_2 - z_1| = |-4| = 4 \quad \text{et} \quad HM_3 = |2-(-2)| = 4$
   L'aire du triangle $M_1M_2M_3$ est $\dfrac{1}{2}(M_1M_2 \times HM_3) = 8$.

Exercice 4 :

1. $(z^2+1)^2 - z^2 = z^4 + 2z^2 + 1 - z^2 = z^4 + z^2 + 1$.
2. $z^4 + z^2 + 1 = (z^2+1)^2 - z^2 = (z^2+1-z)(z^2+1+z) = (z^2-z+1)(z^2+z+1)$.
   Donc $z^4 + z^2 + 1 = (z^2+1)^2 - z^2 = 0 \iff (z^2-z+1) = 0 \text{ ou } (z^2+z+1) = 0$
   Pour les deux équations le discriminant est : $\Delta = 1 - 4 = -3 = (i\sqrt{3})^2$

$z^2 - z + 1 = 0 \iff z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} = z_B \quad \text{ou} \quad z = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2} = \overline{z_B} = z_F.$

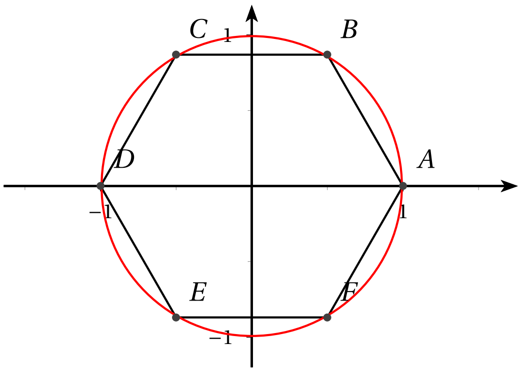
$z^2 + z + 1 = 0 \iff z = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} = -z_F = z_C \quad \text{ou} \quad z = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} = -z_B = z_E$

$z_A = 1 \quad , \quad z_B = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}} \quad , \quad z_C = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$

$z_D = -1 = \mathrm{e}^{i\pi} \quad , \quad z_E = \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{3}} \quad , \quad z_F = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}$

Les solutions de l'équation $z^4 + z^2 + 1 = 0$ sont z_B, z_C, z_E, z_F.

3.



4. Les nombres complexes $z_A, z_B, z_C, z_D, z_E, z_F$ sont de module 1.
   Ils appartiennent au cercle de centre O et de rayon 1.
5. $CE = |z_E - z_C| = |-i\sqrt{3}| = \sqrt{3}$.

   $AE = |z_E - z_A| = \left|\dfrac{3}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\dfrac{9}{4} + \dfrac{3}{4}} = \sqrt{3}.$

   $AC = |z_C - z_A| = \left|-\dfrac{3}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\dfrac{9}{4} + \dfrac{3}{4}} = \sqrt{3}.$

   $CE = AC = AE$, le triangle CEA est équilatéral.

   On en déduit qu'une mesure de $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CE})$ est $-\dfrac{\pi}{3}$.

Exercice 5 :

1. Pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = \dfrac{1}{3}\left(a_n + ib_n + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\right) = \dfrac{1}{3}\left(a_n + \sqrt{a_n^2 + b_n^2} + ib_n\right)$.

   On en déduit que $a_{n+1} = \dfrac{1}{3}(a_n + \sqrt{a_n^2 + b_n^2})$ et $b_{n+1} = \dfrac{1}{3}b_n$.

2. La suite (b_n) est géométrique. Pour tout entier naturel n, $b_n = b_0\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = \dfrac{1}{3^n}$.

   Or $0 < \dfrac{1}{3} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$.

3. (a) Pour tout entier naturel n, $|z_{n+1}| = \dfrac{1}{3}|z_n + |z_n|| \leqslant \dfrac{1}{3}(|z_n| + |z_n|) = \dfrac{2|z_n|}{3}$.

   Donc pour tout entier naturel n, $|z_{n+1}| \leqslant \dfrac{2|z_n|}{3}$.

   (b) Soit $\mathscr{P}_n$: "$u_n \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}$"

- $u_0 = |1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
- On suppose que pour un entier n la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie.

  Sous cette hypothèse, $u_{n+1} = |z_{n+1}| \leqslant \dfrac{2}{3}|z_n| \leqslant \dfrac{2}{3} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}$

  $u_{n+1} \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1} \sqrt{2}$ et $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
- Par récurrence on en déduit que la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

Posons pour tout entier n, $v_n = 0$ et $w_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}$. On a $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$.

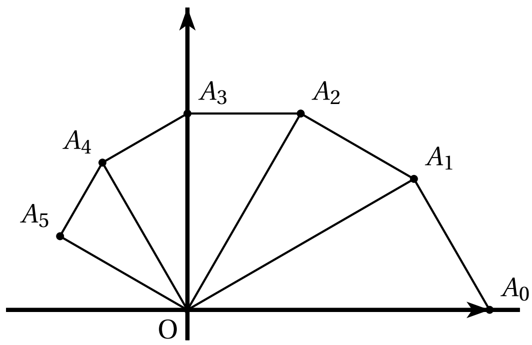
Comme $0 < \dfrac{2}{3} < 1$, la suite géométrique (w_n) tend vers 0.

La suite (u_n) est comprise entre deux suites qui tendent vers 0. On en déduit qu'elle converge et que sa limite est 0. (Théorème de l'encadrement).

(c) Pour tout entier naturel n, $0 \leqslant |a_n| = \sqrt{a_n^2} \leqslant \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = u_n$.

La suite $(|a_n|)$ est comprise entre deux suites qui tendent vers 0. On utilise encore le théorème d'encadrement : la suite (u_n) converge et sa limite est 0. Ceci équivaut à : la suite (a_n) tend vers 0.

Exercice 6 :

1. 

2. L'argument de z_n étant $\dfrac{n\pi}{6}$, A_n est un point de l'axe des ordonnées si et seulement $\dfrac{n\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$, ce qui équivaut à $n = 3 + 6k$.
3. $z_{n+1} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(n+1)\pi}{6}} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n} \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} z_n$

   Or $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = \left(\dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right)$, donc $z_{n+1} = \left(\dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right) z_n$.
4. Pour tout entier n, $u_n = A_nA_{n+1} = |z_{n+1} - z_n|$

   $u_n = \left|\left(\dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right) z_n - z_n\right| = \left|-\dfrac{1}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right| |z_n| = \sqrt{\dfrac{3}{16} + \dfrac{1}{16}}|z_n| = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$

   La suite (u_n) est bien géométrique.
5. $\ell_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \cdots + A_nA_{n+1} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1 - \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}}{1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1 - \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}}{2 - \sqrt{3}}$.

   Comme $0 < \dfrac{\sqrt{3}}{2} < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \ell_n = \dfrac{1}{2-\sqrt{3}} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$.