FONCTION EXPONENTIELLE

Ph DEPRESLE

29 juin 2015

Table des matières

1 Propriétés algébriques

Théorème 1. *Pour tous réels a et b,* $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$.

Démonstration :
Soit a un réel quelconque fixé.On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par :
$g(x) = \dfrac{\exp(a+x)}{\exp(a)} = \dfrac{1}{\exp(a)} \times \exp(a+x)$.

La fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ puisque la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Ainsi pour tout réel $x, g'(x) = \dfrac{1}{\exp(a)} \times \exp(a+x)$.
Donc $g'(x) = g(x)$ et de plus $g(0) = 1$.

D'après le théorème 1, on a donc pour tout réel $x, g(x) = \exp(x)$ soit $\dfrac{\exp(a+x)}{\exp(a)} = \exp(x)$ ou encore $\exp(a+x) = \exp(a) \times \exp(x)$. ▲

Propriétés 1. *Pour tous réels a et b et pour tout entier relatif n, on a :*

$$\exp(-b) = \frac{1}{\exp(b)} \qquad \exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)} \qquad \exp(na) = [\exp(a)]^n$$

2 Nouvelle notation

Le nombre $\exp(1)$ est noté e. Une valeur approchée à 10^{-8} près, donnée par une calculatrice, est 2,71828182.
On a, pour tout entier relatif n, $\exp(n) = [\exp(n \times 1)] = [\exp(1)]^n = e^n$.
Notation : Pour tout x réel, on notera : $\exp(x) = \mathrm{e}^x$.
Les propriétés algébriques de la fonction exponentielle se réécrivent alors de la façon suivante :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{Z}$$

- $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \mathrm{e}^b$
- $\mathrm{e}^{-b} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^b}$
- $\mathrm{e}^{a-b} = \dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}$
- $\mathrm{e}^{na} = (\mathrm{e}^a)^n$
- $\mathrm{e}^{\frac{a}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}^a}$

On remarque que ces propriétés s'écrivent comme un prolongement des règles de calcul sur les exposants, ce qui justifie l'écriture $\exp(x) = \mathrm{e}^x$.

Attention : Ne pas confondre $\mathrm{e}^{x^2} = \exp(x^2)$ et $(\mathrm{e}^x)^2 = \mathrm{e}^{2x} = \exp(2x)$.

3 Étude de la fonction exponentielle

3.1 Variations et limites

Propriétés 2. *La fonction exponentielle est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$ *et*

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \quad \textit{et} \quad \lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$$

Démonstration :

△ROC

- La dérivée de la fonction exponentielle est la fonction exponentielle qui est strictement positive donc la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
exp		$\nearrow$	1	$\nearrow$	

d'après le tableau :
Si $x > 0$ alors $e^x > 1$
Si $x < 0$ alors $e^x < 1$

- Soit h la fonction définie par $h(x) = e^x - x$, h est dérivable et $h'(x) = e^x - 1$.
  Donc pour tout réel $x \geqslant 0$, on a $e^x \geqslant 1$, soit $h'(x) \geqslant 0$.
  De même $h'(x) \leqslant 0$ pour $x \leqslant 0$.
  Le tableau de variation de h est donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

  Comme $h(0) = 1$, 1 est le minimum de la fonction h.
  Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $e^x - x \geqslant 1$ donc $e^x - x \geqslant 0$ et donc $e^x \geqslant x$.
  Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$; par comparaison, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
- C'est le théorème de composition des limites.

  On a $e^x = \dfrac{1}{e^{-x}}$.

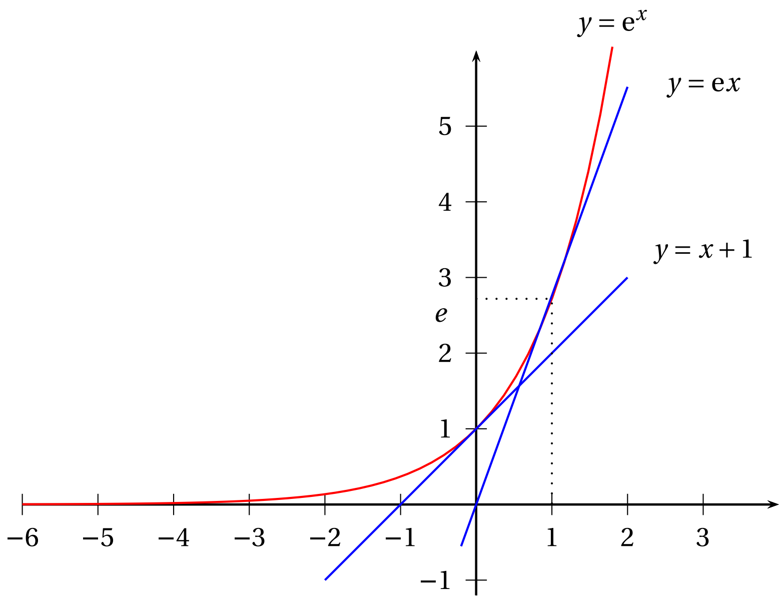
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty\end{array}\right\} \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$$

  Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{e^{-x}} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ ▲

3.2 Représentation graphique

On déduit de ce qui précède le tableau
de variation de la fonction exponentielle :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\exp'(x)$			$+$		
exp	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



La représentation graphique de la fonction exponentielle admet l'axe des abscisses pour asymptote en $-\infty$

3.3 Taux d'accroissement en 0

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = 1$

3.4 Croissances comparées de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ et de la fonction $x \longmapsto x$

Théorème 2.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty \quad \textit{et} \quad \lim_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^x = 0$$

3.5 Résolution d'équations et d'inéquations

La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$ (car dérivable),
et strictement croissante sur $\mathbb{R}$
Donc tout $m \in]0 ; +\infty[$ a un unique antécédent.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
exp	0 ↗	1 ↗	$+\infty$

donc $\begin{array}{ccc} \mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b & \iff & a = b \\ \mathrm{e}^a \leqslant \mathrm{e}^b & \iff & a \leqslant b \end{array}$

en particulier $\begin{array}{ccc} \mathrm{e}^x = 1 & \iff & x = 0 \\ \mathrm{e}^x = \mathrm{e} & \iff & x = 1 \end{array}$

4 Fonction composée $x \longmapsto \mathrm{e}^{u(x)}$

Théorème 3. *Soit une fonction u définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. La fonction f définie sur I par $f(x) = \mathrm{e}^{u(x)}$ est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$, $f'(x) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$.*

5 QCM

1. L'expression $-\mathrm{e}^{-x}$

a. n'est jamais négative	b. est toujours négative	c. n'est négative que si x est positif	d. n'est négative que si x est négatif

2. L'équation $\mathrm{e}^{2x}-3\mathrm{e}^{x}-4=0$ admet dans $\mathbb{R}$:

a. 0 solution	b. 1 solution	c. 2 solutions	d. plus de 2 solutions

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\mathrm{e}^{x}-1}{\mathrm{e}^{x}+2}=$

a. $-\dfrac{1}{2}$	b. 1	c. 2	d. $+\infty$

4. Pour tout réel a et tout entier relatif n, $(\mathrm{e}^{a})^{n}=$

a. $\mathrm{e}^{(a^n)}$	b. e^{an}	c. $\mathrm{e}^{n\ln a}$	d. e^{a+n}

5. Pour tout réel x l'expression $\dfrac{3e^{-x}}{1+2e^{-x}}$ peut s'écrire :

a. $\dfrac{3}{e^{-x}+2}$	b. $\dfrac{3}{e^{x}+2}$	c. $\dfrac{e^{x}+2}{3}$	d. $\dfrac{3}{e^{x}-2}$

Solutions

1. L'expression $-\mathrm{e}^{-x}$ est toujours négative, car e^{-x} est toujours positive.
   La bonne réponse est b.
2. L'équation $X^2-3X-4=0$ admet deux solutions : -1 et 4.
   $\mathrm{e}^{2x}-3\mathrm{e}^{x}-4=0 \iff (\mathrm{e}^{x}=-1 \text{ ou } \mathrm{e}^{x}=4)$
   L'équation $\mathrm{e}^{2x}-3\mathrm{e}^{x}-4=0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique (ln4).
   La bonne réponse est b.
3. $\dfrac{2\mathrm{e}^{x}-1}{\mathrm{e}^{x}+2}=\dfrac{\mathrm{e}^{x}(2-\mathrm{e}^{-x})}{\mathrm{e}^{x}(1+2\mathrm{e}^{-x})}=\dfrac{2-\mathrm{e}^{-x}}{1+2\mathrm{e}^{-x}}$.
   Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}=0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^{x}-1}{\mathrm{e}^{x}+2}=2$
   La bonne réponse est c.
4. $(\mathrm{e}^{a})^{n}=\mathrm{e}^{an}$, la bonne réponse est b.
5. Pour tout réel x l'expression $\dfrac{3e^{-x}}{1+2e^{-x}}$ peut s'écrire $\dfrac{3}{e^{x}+2}$. La bonne réponse est b.

6 EXERCICES : Les exercices de base

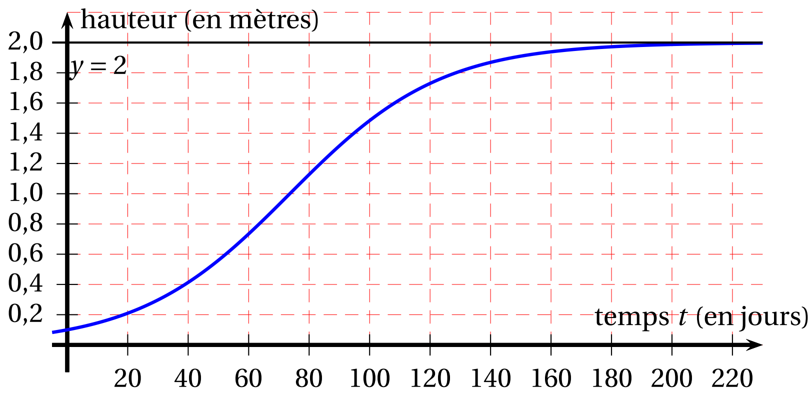
Exercice 1

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3e^x + 2}{e^x + 1}$.

1. Montrer que f peut s'écrire sous la forme $f(x) = 3 - \dfrac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$
2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$. Interprétez graphiquement cette limite.
3. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$. Interprétez graphiquement cette limite.
4. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ puis dresser son tableau de variation.
5. Tracer la courbe représentative de f et ses éventuelles asymptotes dans un repère du plan.

Exercice 2

On s'intéresse à l'évolution de la hauteur d'un plant de maïs en fonction du temps. Le graphique ci-dessous représente cette évolution. La hauteur est en mètres et le temps en jours.



On décide de modéliser cette croissance par une fonction logistique du type :

$$h(t) = \frac{a}{1 + be^{-0,04t}}$$

où a et b sont des constantes réelles positives, t est la variable temps exprimée en jours et $h(t)$ désigne la hauteur du plant, exprimée en mètres.

On sait qu'initialement, pour $t = 0$, le plant mesure $0,1$ m et que sa hauteur tend vers une hauteur limite de 2 m.

1. Déterminer les constantes a et b afin que la fonction h corresponde à la croissance du plant de maïs étudié.
2. On considère désormais que la croissance du plant de maïs est donnée par la fonction f définie sur $[0\,;250]$ par $f(t) = \dfrac{2}{1 + 19e^{-0,04t}}$

   Déterminer $f'(t)$ en fonction de t (f' désignant la fonction dérivée de la fonction f). En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;250]$.
3. Calculer le temps nécessaire pour que le plant de maïs atteigne une hauteur supérieure à $1,5$ m.

Exercice 3

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = e^x + \frac{1}{x}.$$

1. **Étude d'une fonction auxiliaire**
   (a) Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par
   $$g(x) = x^2\mathrm{e}^x - 1.$$
   Étudier le sens de variation de la fonction g.
   (b) Démontrer qu'il existe un unique réel a appartenant à $[0\,;\,+\infty[$ tel que $g(a) = 0$.
   Démontrer que a appartient à l'intervalle $[0{,}703\,;\,0{,}704[$.
   (c) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0\,;\,+\infty[$.
2. **Étude de la fonction** $\boldsymbol{f}$
   (a) Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
   (b) On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   Démontrer que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
   (c) En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   (d) Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel
   $m = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a}$.
   (e) Justifier que $3{,}43 < m < 3{,}45$.

Exercice 4
Partie A
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{1-x}$.

1. Vérifier que pour tout réel x, $f(x) = \mathrm{e} \times \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$.
2. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
3. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.
4. Déterminer la dérivée de la fonction f.
5. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variation.

Partie B
Pour tout entier naturel n non nul, on considère les fonctions g_n et h_n définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$g_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n \quad \text{et} \quad h_n(x) = 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1}.$$

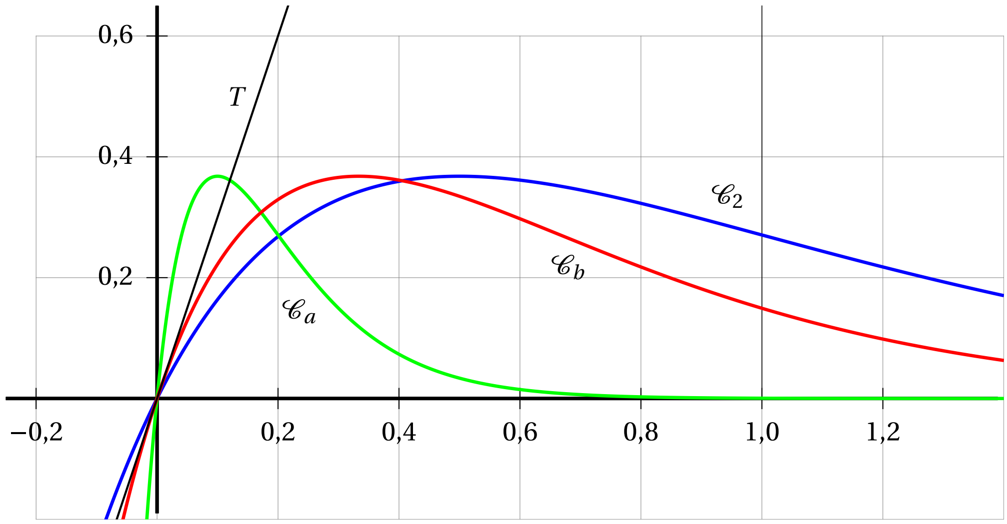
1. Vérifier que, pour tout réel x : $(1-x)g_n(x) = 1 - x^{n+1}$.
   On obtient alors, pour tout réel $x \neq 1$: $g_n(x) = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$.
2. Comparer les fonctions h_n et g'_n, g'_n étant la dérivée de la fonction g_n.
   En déduire que, pour tout réel $x \neq 1$: $h_n(x) = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$.
3. Soit $S_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$, f étant la fonction définie dans la partie A.
   En utilisant les résultats de la **partie B**, déterminer une expression de S_n puis sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 5

Pour tout réel k strictement positif, on désigne par f_k la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ telle que :

$$f_k(x) = kx\mathrm{e}^{-kx}.$$

On note $\mathscr{C}_k$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
On a représenté sur le graphique ci-dessous les courbes $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_a$ et $\mathscr{C}_b$ où a et b sont des réels strictement positifs fixés et T la tangente à $\mathscr{C}_b$ au point O origine du repère.



1. Montrer que pour tout réel k strictement positif, les courbes $\mathscr{C}_k$ passent par un même point.
2. Pour tout réel k strictement positif, déterminer les limites de f_k en $-\infty$ et $+\infty$. En déduire que la courbe $\mathscr{C}_k$ admet une asymptote que l'on précisera.
3. (a) Montrer que pour tout réel k strictement positif et tout réel x on a

$$f_k'(x) = k(1 - kx)\mathrm{e}^{-kx}.$$

   (b) Justifier que, pour tout réel k strictement positif, f_k admet un maximum et calculer ce maximum.

   (c) En observant le graphique ci-dessus, comparer a et 2. Expliquer la démarche.

   (d) Écrire une équation de la tangente à $\mathscr{C}_k$ au point O origine du repère.

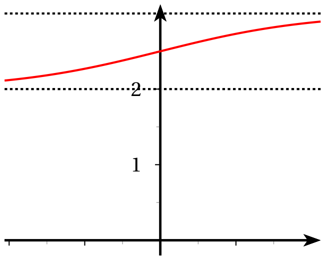
   (e) En déduire à l'aide du graphique une valeur approchée de b.

7 EXERCICES : Les exercices de base (corrigés)

Exercice 1 :

1. $3-\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}=3-\dfrac{1}{e^x+1}=\dfrac{3(e^x+1)-1}{e^x+1}=\dfrac{3e^x+2}{e^x+1}=f(x)$
2. Quand x tend vers $-\infty$, e^x tend vers 0. Donc $f(x)$ tend vers 2.
   La droite $y=2$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $-\infty$.
3. Quand x tend vers $+\infty$, $-x$ tend vers $-\infty$, donc e^{-x} tend vers 0. En utilisant l'expression de f calculée à la question 1, on trouve que $f(x)$ tend vers 3.
   La droite $y=3$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $+\infty$.
4. f est dérivable comme quotient de fonctions dérivables, le dénominateur ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$.
   $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=\dfrac{3e^x(e^x+1)-(3e^x+1)e^x}{(e^x+1)^2}=\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$

x	$-\infty$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
f	2 ↗ 3



Exercice 2 :

1. $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0,04t}=0$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=a$.
   En observant le graphique, on voit qu'on doit choisir $a=2$.
   $h(0)=\dfrac{a}{1+b}$. Or sur le graphique on a $h(0)=0,1$.
   Donc $b+1=2\times10=20$ et $b=19$.
2. $f=2\times\dfrac{1}{u}$ avec $u(t)=1+19e^{-0,04t}$
   Pour tout réel t, $f'(t)=-2\dfrac{u'(t)}{(u(t))^2}=-2\dfrac{-19\times0,04}{(1+19e^{-0,04t})^2}=\dfrac{1,52}{(1+19e^{-0,04t})^2}$
   f' est positive, donc f est croissante (comme la fonction du graphique !)
3. $f(t)=1,5 \iff \dfrac{2}{1,5}=1+19e^{-0,04t} \iff e^{0,04t}=3\times19 \iff t=\dfrac{1}{0,04}\ln(57)$.
   On trouve $t\approx101,08$, il faut donc 102 jours pour que le plant de maïs atteigne une hauteur supérieure à 1,5 m.

Exercice 3 :

1. (a) Pour tout $x\in]0;+\infty[$, $g'(x)=2xe^x+x^2e^x=(2x+x^2)e^x$.
   g' est strictement positive sur $]0;+\infty[$, donc g est strictement croissante sur cet intervalle.
   (b) g est continue, strictement croissante de $[0;+\infty[$ sur $[-1;+\infty[$. D'après le théorème le théorème des valeurs intermédiaires pour une fonction continue strictement croissante, il existe un unique réel a appartenant à $[0\,;\,+\infty[$ tel que $g(a)=0$.

x	0		a		$+\infty$
g	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$g(0,703) \approx 0,998 - 1 < 0$, donc $0,703 < a$

$g(0,704) \approx 1,002 - 1 > 0$, donc $a < 0,704$.

(c) Si $x \in [0; a]$, $g(x) \leqslant 0$ et si $x \in [a; +\infty[$, $g(x) \geqslant 0$.

2. (a) $\lim\limits_{x \to 0} \mathrm{e}^x = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

   $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

   (b) Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2\mathrm{e}^x - 1}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$

   (c) f' a donc même signe que g.

x	0		a		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

   (d) f est décroissante sur $]0, a[$, donc $f(x) > f(a)$ si $x < a$.

   f est croissante sur $[a; +\infty[$, donc $f(a) \leqslant f(x)$ si $a \leqslant x$.

   f admet pour minimum le nombre $m = f(a) = \mathrm{e}^a + \dfrac{1}{a}$.

   Or $g(a) = 0$, donc $\mathrm{e}^a = \dfrac{1}{a^2}$. On a bien $m = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a}$.

   (e) On a vu que $a > 0,703$, donc $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{0,703}$ et $\dfrac{1}{a^2} < \dfrac{1}{(0,703)^2}$.

   On a bien : $m < \dfrac{1}{0,703} + \dfrac{1}{(0,703)^2} < 3,45$.

   $a < 0,704$, donc $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{0,704}$ et $\dfrac{1}{a^2} > \dfrac{1}{(0,704)^2}$.

   On a bien : $m > \dfrac{1}{0,704} + \dfrac{1}{(0,704)^2} > 3,43$.

Exercice 4 :

Partie A

1. Pour tout réel x, $f(x) = x\mathrm{e}^{1-x} = x \times \mathrm{e} \times \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e} \times \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$.
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{1-x} = +\infty$. Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
3. Par croissances comparées : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$

   Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

La courbe représentative de f dans un repère du plan admet la droite $y = 0$ comme asymptote horizontale.

4. Pour tout réel x, $f'(x) = \mathrm{e}^{1-x} - x\mathrm{e}^{1-x} = (1-x)\mathrm{e}^{1-x}$.
5. f' est positive sur $]-\infty;1]$ et négative sur $[1;+\infty[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	1	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Partie B

1. Pour tout réel x : $(1-x)g_n(x) = (1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^n)$
$(1-x)g_n(x) = (1+x+x^2+\cdots+x^n) - (x+x^2+\cdots+x^{n+1}) = 1 - x^{n+1}$.
On a bien, pour tout réel $x \neq 1$: $g_n(x) = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$.
2. Pour tout réel x, $g_n'(x) = 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1} = h_n(x)$
Donc, pour tout réel $x \neq 1$: $h_n(x) = g_n'(x) = \dfrac{-(n+1)x^n(1-x) - (-1)(1-x^{n+1})}{(1-x)^2}$
$h_n(x) = \dfrac{-(n+1)x^n + (n+1)x^{n+1} + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2} = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$.
3. $S_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = 1 + 2\mathrm{e}^{-1} + \cdots + n\mathrm{e}^{1-n} = 1 + \dfrac{2}{\mathrm{e}} + \cdots + \dfrac{n}{\mathrm{e}^{n-1}} = h_n\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$.
$S_n = \dfrac{\frac{n}{\mathrm{e}^{n+1}} - \frac{n+1}{\mathrm{e}^n} + 1}{\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^2}$.
Par croissances comparées : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\mathrm{e}^{n+1}} = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{\mathrm{e}^n} = 0$.
Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^2}$.

Exercice 5 :

1. Pour tout réel k strictement positif, $f_k(0) = 0$. Toutes les courbes $\mathscr{C}_k$ passent par le point O.
2. • $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} kx = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-kx} = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f_k(x) = -\infty$.
• $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} kx = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{y\to+\infty} y\mathrm{e}^{-y} = 0$ (croissance comparée),
donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_k(x) = 0$
La droite $y = 0$ est asymptote à la courbe représentative de f en $-\infty$ et $+\infty$.
3. (a) Pour tout réel k strictement positif et tout réel x on a :
$f_k'(x) = k(\mathrm{e}^{-kx} - kx\mathrm{e}^{-kx}) = k(1-kx)\mathrm{e}^{-kx}$.
(b) $f_k'(x) \geqslant 0 \iff x \leqslant \dfrac{1}{k}$. Le tableau de variations de f_k est :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{k}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$			0	$-$	
f	$-\infty$	↗	0	↗	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	↘	0

Pour tout réel k strictement positif, f_k admet un maximum en $\dfrac{1}{k}$.

Ce maximum est $f_k\left(\dfrac{1}{k}\right) = \mathrm{e}^{-1} = \dfrac{1}{e}$.

(c) Le maximum de f_a est atteint en $\dfrac{1}{a}$, celui de f_2 en $\dfrac{1}{2}$.

Sur le graphique on observe que $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{2}$, donc $a > 2$.

(d) Une équation de la tangente à $\mathscr{C}_k$ au point O est :
$y = f'_k(0)(x-0) + f_k(0) = kx$.

(e) On voit sur le graphique que le coefficient directeur de T est 3, l'équation de T est $y = 3x$.
Nécessairement $b = 3$,