CALCUL INTEGRAL

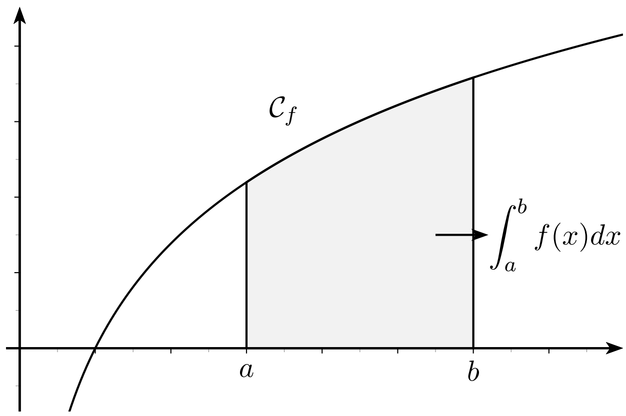
Ph DEPRESLE

29 juin 2015

Table des matières

1 Intégrale d'une fonction continue et positive sur un segment

Définition 1. *On se place dans le repère orthogonal* $(O; \vec{i}, \vec{j})$ *du plan.*
Soit f *une une fonction continue et positive sur* $[a, b]$ $\quad (a \leqslant b)$.
On appelle intégrale de f *sur* $[a, b]$ *et on note* $\int_a^b f(x)dx$ *l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface délimitée par la courbe représentative de* f*, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations* $x = a$ *et* $x = b$.



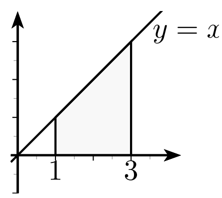
Remarques :

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \qquad \int_a^b 0dx = 0$$

Exemple :

$\int_1^3 xdx = \frac{3+1}{2} \times 2 = 4$

Rappel : l'aire d'un trapèze de bases b et B et de hauteur h est $\mathcal{A} = \frac{b+B}{2}h$.



2 Primitives d'une fonction sur un intervalle

2.1 Primitives, définition

Définition 2. *On appelle primitive de la fonction* f *sur l'intervalle* I *toute fonction* F *dérivable sur* I *de dérivée* f.

Propriétés 1. *Soit* F *une primitive de la fonction* f *sur* I.

1. *Pour tout réel* k, $G = F + k$ *est aussi une primitive de* f *sur* I.
2. *Si* G *est une primitive de* f *sur* I*, alors il existe un réel* k *tel que :* $G = F + k$.

Propriétés 2.

1. *Si* F *est une primitive de* f *sur I, alors pour tout réel* k, kF *est une primitive de* kf *sur le même intervalle.*
2. *Si* F *et* H *sont des primitives, respectivement des fonctions* f *et* h *sur I, alors* $F + H$ *est une primitive de* $f + h$ *sur I.*

2.2 Calculs de primitives :

On se sert de la connaissance des formules des dérivées pour obtenir celles des primitives.
Soit u une fonction dérivable sur l'intervalle I.

Propriétés 3.

1. *Si f peut s'écrire sous la forme $u'u^n$ avec n entier non nul :*
   - *Si $n \neq -1$, alors les primitives F de f sur I s'écrivent sous la forme :*

     $$F = \frac{1}{n+1}u^{n+1} + C$$

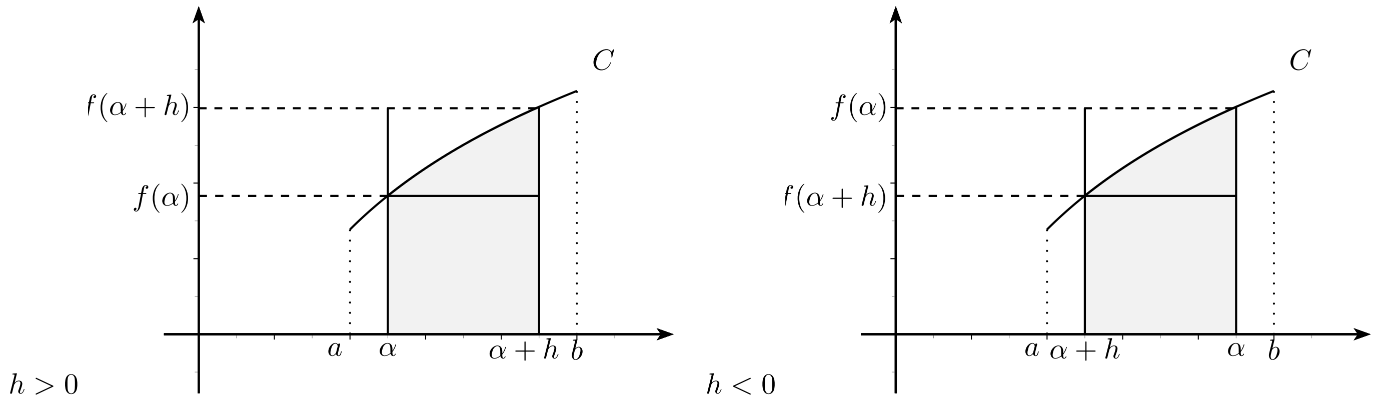
     si $n < 0$, il faut s'assurer que u ne s'annule pas sur I.
   - *Si $n = -1$ et si $u > 0$ sur I, c'est-à-dire si f est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u > 0$, alors les primitives de f sur I s'écrivent sous la forme $F = lnu + C$.*
2. *Si f peut s'écrire sous la forme $u' \times e^u$, alors les primitives de f sur I s'écrivent sous la forme $F = e^u + C$.*

Exemple : Déterminer les primitives de $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$.
Si on pose $u(x) = x^2 + 1$, on a $u(x) > 0$ et $u'(x) = 2x$.
f est de la forme $\frac{u'}{u}$, donc F est de la forme $\ln u$, soit :
$F(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + C \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

3 Primitives et intégrale

Théorème 1. *Soit f une fonction continue sur l'intervalle I contenant a, alors la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur I et sa dérivée est f : $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$.*

Démonstration
On fera la démonstration pour une fonction f strictement croissante et positive sur $[a; b]$.
Soit α un réel de $[a; b]$ et h tel que $\alpha + h \in [a; b]$.
On a :$F(\alpha) = \int_a^\alpha f(t)dt$ et $F(\alpha + h) = \int_a^{\alpha+h} f(t)dt$.
L'aire de la surface coloriée est :
$\int_\alpha^{\alpha+h} f(t)dt = F(\alpha + h) - F(\alpha)$ si $h > 0$ et
$\int_{\alpha+h}^{\alpha} f(t)dt = F(\alpha) - F(\alpha + h)$ si $h < 0$.



- **Si** $h > 0$

  On a $h \times f(\alpha) \leqslant F(\alpha+h) - F(\alpha) \leqslant h \times f(\alpha+h)$, puisque f est croissante sur I.

  $f(\alpha) \leqslant \dfrac{F(\alpha+h)-F(\alpha)}{h} \leqslant f(\alpha+h)$. Or, f est continue sur I donc $\lim\limits_{h\to 0} f(\alpha+h) = f(\alpha)$.

  D'après le théorème d'encadrement, il en résulte que $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \dfrac{F(\alpha+h)-F(\alpha)}{h} = f(\alpha)$.

- **Si** $h < 0$

  On a $(-h) \times f(\alpha+h) \leqslant F(\alpha) - F(\alpha+h) \leqslant (-h) \times f(\alpha)$, puisque f est croissante sur I.

  $f(\alpha+h) \leqslant \dfrac{F(\alpha+h)-F(\alpha)}{h} \leqslant f(\alpha)$. Or, f est continue sur I donc $\lim\limits_{h\to 0} f(\alpha+h) = f(\alpha)$.

  D'après le théorème d'encadrement, il en résulte que $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \dfrac{F(\alpha+h)-F(\alpha)}{h} = f(\alpha)$.

- Donc F est dérivable en α et $F'(\alpha) = f(\alpha)$ pour tout α de I.▲

Corollaire :
Si f est continue sur I, alors f admet des primitives sur I.
$F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

Propriétés 4. *Si G est une primitive quelconque de f sur l'intervalle I, a et b étant des réels quelconques de I, alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$ *, ce qui s'écrit aussi* $[G(t)]_a^b$

Remarque : $\ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t}$ sur $]0;+\infty[$.

4 Propriétés générales d'une intégrale

4.1 Relation de Chasles

Théorème 2. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant a, b, c alors :*
$$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$$

Exemple : $\displaystyle\int_0^3 |t-2|dt = \int_0^2 (2-t)dt + \int_2^3 (t-2)dt = \frac{5}{2}$.

4.2 Linéarité

Théorème 3. *Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I contenant a et b, et λ et μ deux réels, alors :*
$\int_a^b [\lambda f(t) + \mu g(t)]\, dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt$

Remarques :

1. $\int_a^b -f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$
2. $\int_a^b (f(t).g(t))dt \neq \int_a^b f(t)dt \times \int_a^b g(t)dt$ en général

   Contre exemple :
   - $\int_1^2 (t.\frac{1}{t})dt = [t]_1^2 = 1$
   - $\int_1^2 tdt \times \int_1^2 \frac{1}{t}dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_1^2 \times [\ln t]_1^2 = \frac{3}{2}\ln 2.$

4.3 Positivité

Théorème 4. *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ avec $a \leqslant b$ telle que $\forall t \in [a,b], f(t) \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$.*

Remarques :

1. La réciproque est fausse ! En effet $\int_0^{\frac{3\pi}{4}} \cos t dt = [\sin t]_0^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$ mais la fonction cosinus n'est pas positive sur $\left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$.
2. Si f est négative et $a \leqslant b$ alors $\int_a^b f(t)dt \leqslant 0$.

Théorème 5. *Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ avec $a \leqslant b$ telles que $\forall t \in [a,b], f(t) \geqslant g(t)$
alors $\int_a^b f(t)dt \geqslant \int_a^b g(t)dt$.*

Exemple : $I = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt$.

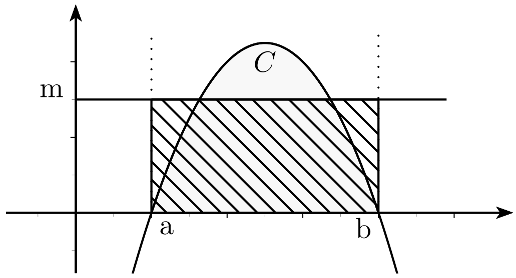
$$\begin{array}{ll} \text{On a} & \frac{1}{1+t} \leqslant \frac{1}{1+t^2} \leqslant 1 \\ \text{soit} & \int_0^1 \frac{1}{1+t}dt \leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt \leqslant \int_0^1 1dt \\ \text{donc} & \ln 2 \leqslant I \leqslant 1. \end{array}$$

4.4 Valeur moyenne

Définition 3. *Pour toute fonction continue sur* $[a,b]$ *avec* $a \neq b$*, la valeur moyenne de* f *sur* $[a,b]$ *est le réel* m *tel que :*

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Si $f(x) > 0$, on s'intéresse au rectangle de largeur $b - a$ dont l'aire est égale à l'aire de la surface sous la courbe : c'est la longueur m de ce rectangle que l'on appelle "valeur moyenne de f sur $[a;b]$". Si f est une fonction constante sur $[a;b]$, sa valeur moyenne sur $[a;b]$ est égale à cette constante.



5 QCM

1. L'intégrale $\displaystyle\int_{-2}^{2} x^2 dx$ est égale à :

   a. $\dfrac{3}{4}$ b. $\dfrac{4}{3}$ c. $\dfrac{16}{3}$ d. 0

2. L'intégrale $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x}{3} dx$ est égale à :

   a. $-\dfrac{3}{12}$ b. $\dfrac{1}{24}$ c. $\dfrac{1}{12}$ d. 0

3. Une primitive de $x \mapsto \sin(2x)$ est :

   a. $x \mapsto 2\cos(2x)$ b. $x \mapsto -\dfrac{1}{2}\cos(2x) + 3$ c. $x \mapsto \dfrac{1}{2}\cos(2x)$

4. Une primitive de $x \mapsto x\mathrm{e}^x$ est :

   a. $f(x) = \dfrac{x^2}{2}\mathrm{e}^x$ b. $g(x) = (x-1)\mathrm{e}^x$ c. $h(x) = \mathrm{e}^x$

Solutions

1. $\displaystyle\int_{-2}^{2} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \frac{2^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3} = 2\frac{8}{3} = \frac{16}{3}.$

   La bonne réponse est c.

2. $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x}{3} dx = \frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{(-2)^2}\right) = 0$

   La bonne réponse est d.

3. Une primitive de cette fonction est de la forme $x \mapsto -\dfrac{1}{2}\cos(2x) + k$ où k est un réel quelconque.

   La bonne réponse est b.

4. $g'(x) = \mathrm{e}^x + (x-1)\mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x$.

   La bonne réponse est b.

6 EXERCICES : Les exercices de base

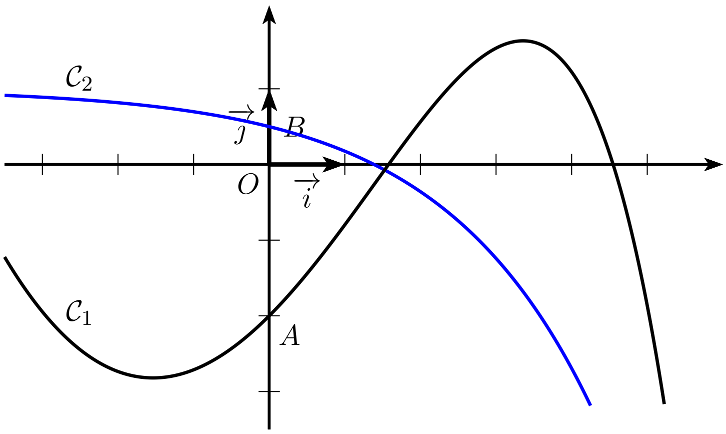
Exercice 1
Trouver les primitives de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$.

Exercice 2
f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+1)e^{-x}$. Montrer que f admet une primitive de la forme $F(x) = (ax+b)e^{-x}$.

Exercice 3
Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous où a et b désignent deux réels.

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	b	↘ $-\infty$

1. Déterminer le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on a tracé deux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
   Elles coupent l'axe des ordonnées aux points A et B d'ordonnées -2 et $\dfrac{1}{2}$ respectivement.
   L'une de ces courbes est la courbe représentative de la fonction dérivée f' de f et l'autre la courbe représentative d'une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$.



   (a) Indiquer laquelle de ces deux courbes est la courbe représentative de la fonction f. Justifier la réponse.
   (b) À l'aide des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, prouver que $1 < a < 2$ et $b > 0$.
3. Dans cette question, on admet que la fonction f est pour tout réel x,
$$f(x) = ke^{\frac{x}{2}} + x + 2$$
   (a) Déterminer le réel k.
   (b) En utilisant les coordonnées des points A et B, déterminer les fonctions f et F ainsi que les réels a et b.

(c) Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f. Déterminer en unités d'aire, l'aire de la partie du plan limité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = a$.

Exercice 4

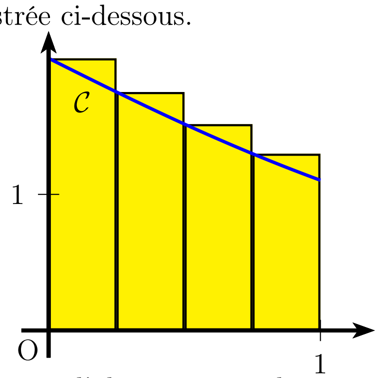
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Étude de la fonction f.
   (a) Étudier les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire les éventuelles asymptotes de la courbe $\mathcal{C}$.
   (b) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. Calcul d'une valeur approchée de l'aire sous une courbe.
   On note $\mathcal{D}$le domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$. On approche l'aire du domaine $\mathcal{D}$ en calculant une somme d'aires de rectangles.
   (a) Dans cette question, on découpe l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ en quatre intervalles de même longueur :
      - Sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{1}{4}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f(0)$
      - Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{2}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\frac{1}{4}\right)$
      - Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\ ;\ \frac{3}{4}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\frac{1}{2}\right)$
      - Sur l'intervalle $\left[\frac{3}{4}\ ;\ 1\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\frac{3}{4}\right)$

      Cette construction est illustrée ci-dessous.



L'algorithme ci-dessous permet d'obtenir une valeur approchée de l'aire du domaine $\mathcal{D}$ en ajoutant les aires des quatre rectangles précédents :

Variables :	k est un nombre entier
	S est un nombre réel
Initialisation :	Affecter à S la valeur 0
Traitement :	Pour k variant de 0 à 3
	Affecter à S la valeur $S + \frac{1}{4}f\left(\frac{k}{4}\right)$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher S

Donner une valeur approchée à 10^{-3} près du résultat affiché par cet algorithme.

(b) Dans cette question, N est un nombre entier strictement supérieur à 1. On découpe l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ en N intervalles de même longueur. Sur chacun de ces intervalles, on construit un rectangle en procédant de la même manière qu'à la question 2.a.

Modifier l'algorithme précédent afin qu'il affiche en sortie la somme des aires des N rectangles ainsi construits.

3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = (-x-3)\mathrm{e}^{-x}.$$

(a) Vérifier que g est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

(b) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{D}$, exprimée en unités d'aire.

(c) Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de l'erreur commise en remplaçant $\mathcal{A}$ par la valeur approchée trouvée au moyen de l'algorithme de la question 2. a, c'est-à-dire l'écart entre ces deux valeurs.

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = 5\mathrm{e}^{-x} - 3\mathrm{e}^{-2x} + x - 3.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de la fonction f et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x - 3$ dans un repère orthogonal du plan.

Partie A : Positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}$

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = f(x) - (x-3)$.

1. Justifier que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, $g(x) > 0$.
2. La courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite $\mathcal{D}$ ont-elles un point commun ? Justifier.

Partie B : Étude de la fonction g

On note M le point d'abscisse x de la courbe $\mathcal{C}_f$, N le point d'abscisse x de la droite $\mathcal{D}$ et on s'intéresse à l'évolution de la distance MN.

1. Justifier que, pour tout x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, la distance MN est égale à $g(x)$.
2. On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   Pour tout x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, calculer $g'(x)$.
3. Montrer que la fonction g possède un maximum sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ que l'on déterminera.
   En donner une interprétation graphique.

Partie C : Étude d'une aire

On considère la fonction $\mathcal{A}$ définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$\mathcal{A}(x) = \int_0^x [f(t) - (t-3)]\,\mathrm{d}t.$$

1. Justifier que la fonction $\mathcal{A}$ est croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
2. Pour tout réel x strictement positif, calculer $\mathcal{A}(x)$.
3. Existe-t-il une valeur de x telle que $\mathcal{A}(x) = 2$?

7 EXERCICES : Les exercices de base (corrigés)

Exercice 1 :
La fonction définie par $u(x) = \mathrm{e}^x + 1$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, strictement positive et $f(x) = \dfrac{u^{'}(x)}{u(x)}$.
On reconnaît la dérivée de la fonction $\ln u$.
L'ensemble des primitives de f sur $\mathbb{R}$ est l'ensemble des fonctions qui s'écrivent :
$\ln(\mathrm{e}^x + 1) + c$ où c est une constante réelle.

Exercice 2 :
$F^{'}(x) = a\mathrm{e}^{-x} - (ax + b)\mathrm{e}^{-x} = (-ax + a - b)\mathrm{e}^{-x}$.
On veut avoir $F^{'}(x) = (2x + 1)\mathrm{e}^{-x}$. Il suffit de prendre :
$\left\{\begin{array}{l} -a = 2 \\ a - b = 1 \end{array}\right.$ Ce qui équivaut à $\left\{\begin{array}{l} a = -2 \\ b = -3 \end{array}\right.$
Une primitive de f est F définie par $F(x) = (-2x - 3)\mathrm{e}^{-x}$.

Exercice 3

1. Sur $]-\infty; a[$ f est croissante, donc f' est positive.
   Sur $]a; +\infty[$ f est décroissante, donc f' est négative.
   f présente un maximum en a, donc $f'(a) = 0$.
2. (a) La fonction représentée par $\mathcal{C}_1$ s'annule au moins deux fois. $\mathcal{C}_1$ ne peut pas représenter f', qui ne s'annule qu'en a.
   C'est $\mathcal{C}_2$ qui représente f'.
   (b) Comme $f'(a) = 0$, a est l'abscisse du point de $\mathcal{C}_2$ qui a une ordonnée nulle. On en déduit que $1 < a < 2$.
   F est représentée par $\mathcal{C}_1$, elle n'est pas monotone. Sa dérivée f n'a pas un signe constant. On en déduit que $b > 0$.
3. (a) Pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{k}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + 1$, donc $f'(0) = \dfrac{k}{2} + 1$.
   Or $\mathcal{C}_2$ passe par le point B, donc $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.
   Donc $k = -1$.
   (b) Pour tout réel x, $f(x) = -\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + x + 2$.
   F est une primitive de f, il existe donc $c \in \mathbb{R}$, $F(x) = -2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + \dfrac{x^2}{2} + 2x + c$.
   $F(0) = -2 + c$ et comme $\mathcal{C}_1$ passe par le point A, $F(0) = -2$ et $c = 0$.
   Pour tout réel x, $F(x) = -2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + \dfrac{x^2}{2} + 2x$.
   $f'(x) = 0 \iff -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + 1 = 0 \iff \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} = 2 \iff x = 2\ln 2$
   Donc $a = 2\ln 2$.
   $b = f(a) = -\mathrm{e}^{\ln 2} + 2\ln 2 + 2 = 2\ln 2$.

(c) $f(0) = 1$, donc f est positive sur $[0; a]$.
L'aire de la partie du plan limité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = a$ est donc :
$\mathcal{A} = \int_0^a f(t)\,dt = F(a) - F(0) = -2\mathrm{e}^{\ln 2} + \frac{1}{2}(2\ln 2)^2 + \ln 2 + 2$
$\mathcal{A} = -2 + 2(\ln 2)^2 + \ln 2$.

Exercice 4

1. (a) • $\lim_{x\to-\infty}(x+2) = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$. Donc $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
• On utilise le théorème de croissance comparée :
$\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} 2\mathrm{e}^{-x} = 0$. Donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
La droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

(b) Pour tout réel x, $f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - (x+2)\mathrm{e}^{-x} = -(x+1)\mathrm{e}^{-x}$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

2. (a) Cet algorithme calcule $S = \frac{1}{4}\left(f(0) + f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{2}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right)\right)$.
La calculatrice donne $S \approx 1,642$.

(b) On doit remplacer 4 par N et 3 par $N - 1$.

Variables :	k est un nombre entier
	S est un nombre réel
Initialisation :	Affecter à S la valeur 0
Traitement :	Pour k variant de 0 à N-1
	Affecter à S la valeur $S + \frac{1}{N}f\left(\frac{k}{N}\right)$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher S

3. (a) Pour tout réel x, $g'(x) = -\mathrm{e}^{-x} - (-x-3)\mathrm{e}^{-x} = (x+2)\mathrm{e}^{-x} = f(x)$.
g est bien une primitive de la fonction f.

(b) f est une fonction continue et positive sur $[0; 1]$, donc l'aire $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{D}$, exprimée en unités d'aire est égale à :
$\mathcal{A} = \int_0^1 f(t)\,dt = g(1) - g(0) = -4\mathrm{e}^{-1} + 3 \approx 1,528$.

(c) L'erreur commise est à peu près égale à 0,114.

Exercice 5

Partie A : Positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}$

$g(x) = f(x) - (x - 3)$.

1. $\forall x \in [0\ ;\ +\infty[$, $g(x) = 5\mathrm{e}^{-x} - 3\mathrm{e}^{-2x} = \mathrm{e}^{-2x}\left(5\mathrm{e}^{x} - 3\right)$.
   Comme $\mathrm{e}^{-2x} > 0$, $g(x)$ est du signe de $5\mathrm{e}^{x} - 3$.
   $5\mathrm{e}^{x} - 3 > 0 \iff \mathrm{e}^{x} > \dfrac{3}{5} \iff x > \ln\left(\dfrac{3}{5}\right)$.
   Or $1 > \dfrac{3}{5}$, donc $0 > \ln\left(\dfrac{3}{5}\right)$ et $5\mathrm{e}^{x} - 3 > 0$.
   On a démontré que : $\forall x \in [0\ ;\ +\infty[,\quad g(x) > 0$.
2. Si x est l'abscisse d'un point commun à la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite $\mathcal{D}$, son ordonnée devrait être égale à la fois à $f(x)$ et à $x - 3$, donc x devrait vérifier $g(x) = 0$. Ceci est impossible car on vient de démontrer que $g(x) > 0$.
   La courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite $\mathcal{D}$ n'ont donc pas de point commun.

Partie B : Étude de la fonction g

1. Comme M et N ont la même abscisse, pour tout x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$,
   $MN = \mid f(x) - (x-3) \mid = \mid g(x) \mid = g(x)$ car $g(x) > 0$ d'après la partie A.
2. $\forall x \in]0;+\infty[$, $g'(x) = -5\mathrm{e}^{-x} + 2 \times 3\mathrm{e}^{-2x} = 6\mathrm{e}^{-2x} - 5\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-2x}(6 - 5\mathrm{e}^{x})$.
3. Comme e^{-2x} est toujours positif, $g'(x)$ sera du signe de $6\mathrm{e}^{-x} - 5$.
   $6 - 5\mathrm{e}^{x} \geqslant 0 \iff \dfrac{6}{5} \geqslant \mathrm{e}^{x}$
   Soit $\ln\left(\dfrac{6}{5}\right) \geqslant x$. car la fonction ln est strictement croissante.

x	0	$\ln(\frac{6}{5})$	$+\infty$
g	$\nearrow$	$\frac{25}{12}$	$\searrow$

g

présente un maximum en $\ln\left(\dfrac{6}{5}\right)$, la distance de M à N est maximale pour $x = \ln\left(\dfrac{6}{5}\right)$

Partie C : Étude d'une aire

1. $\forall x \in [0;+\infty[$, $\mathcal{A}(x) = \displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$. g étant continue, la fonction $\mathcal{A}$ est dérivable sur $[0;+\infty[$ et $\mathcal{A}'(x) = g(x)$. Comme $g(x) > 0$ sur $[0;+\infty[$, la fonction $\mathcal{A}$ est croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
2. Pour tout réel x strictement positif,
$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(x) &= \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t = 5\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t - 3\int_0^x \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t \quad \text{par linéarité de l'intégrale}\\
&= 5\left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^x - 3\left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\right]_0^x\\
&= 5\left(-\mathrm{e}^{-x} + 1\right) - 3\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{2}\right)\\
&= 5 - 5\mathrm{e}^{-x} + \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-2x} - \frac{3}{2}\\
\mathcal{A}(x) &= \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-2x} - 5\mathrm{e}^{-x} + \frac{7}{2}
\end{aligned}$$
3. $\mathcal{A}(x) = 2 \iff \dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-2x} - 5\mathrm{e}^{-x} + \dfrac{7}{2} = 2 \iff \dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-2x} - 5\mathrm{e}^{-x} + \dfrac{3}{2} = 0$
   En posant $X = \mathrm{e}^{-x}$, l'équation devient $\dfrac{3}{2}X^2 - 5X + \dfrac{3}{2} = 0$.
   Cette équation du second degré admet deux solutions : $\dfrac{1}{3}, 3$.

Donc $e^{-x} = \frac{1}{3}$ ou $e^{-x} = 3$ ce qui équivaut à $e^{x} = 3$ ou $e^{x} = \frac{1}{3}$
Donc $x = \ln 3$ ou $x = -\ln 3$. Comme $x \in]0\ ;\ +\infty[$ la seule solution est $x = \ln 3$.
$\ln 3$ est l'unique solution de l'équation $\mathcal{A}(x) = 2$.