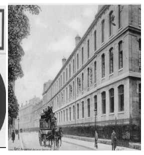
Terminale S5 sujets
Année 2013-2014

Ph DEPRESLE

16 juin 2014

Table des matières

1 Devoir n 1 Septembre 2013 2 heures



Terminale 4 et 5
Lundi 23 Septembre 2013

INTERROGATION ÉCRITE N 1

<u>EXERCICE 1</u> (5 points)

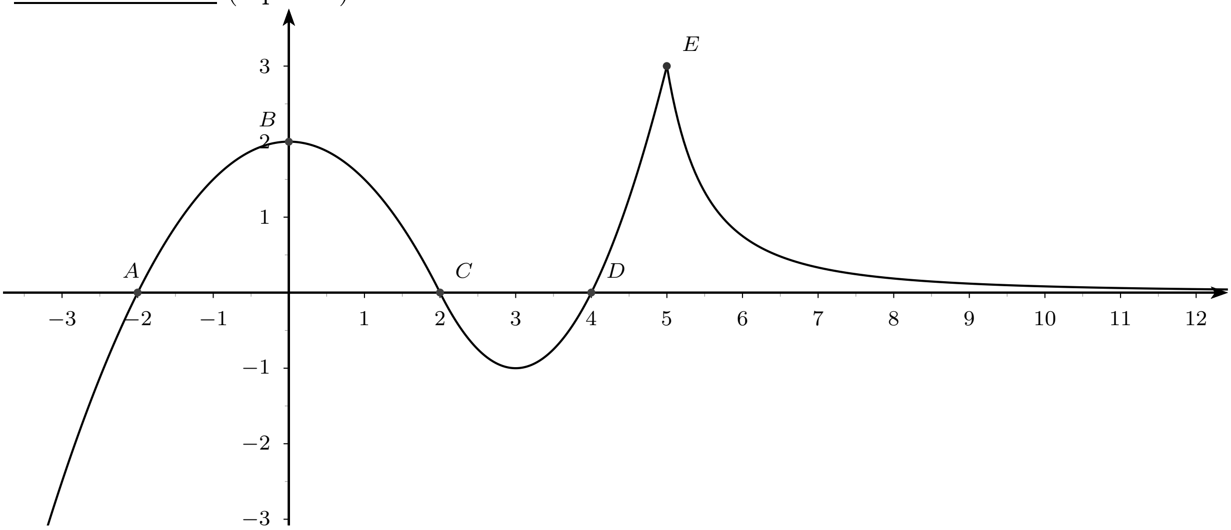
1. Déterminer en justifiant :
   $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x<4}} \dfrac{x^2+1}{-x+4}$ $\qquad\qquad$ $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$ $\qquad\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+\sqrt{x}}{2x^2+3x+1}$
2. Quelles sont les asymptotes de la représentation graphique de f définie par $f(x) = \dfrac{2x^2-50}{x^2-5x}$. Justifier.

<u>EXERCICE 2</u> (3 points)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x - 1 \text{ si } x < 2 \\ f(x) = 2x - 3 \text{ si } 2 \leqslant x < 4 \\ f(x) = x^2 - 8x + 20 \text{ si } x \geqslant 4 \end{cases}$$

1. Représenter f
2. f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Justifier.
3. f est-elle continue sur $]-\infty, 4]$? Justifier.

<u>EXERCICE 3</u> (5 points)



Les coordonnées des points A, B, C, D et E sont :
$A(-2;0)$ $\qquad$ $B(0;2)$ $\qquad$ $C(2;0)$ $\qquad$ $D(4;0)$ $\qquad$ $E(5;3)$
Soit f la fonction dont la courbe est donnée ci dessus.

1. Donner le tableau de variations de f.

2. Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$
   (a) Donner le domaine de définition de g.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} g(x)$; $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x>-2}} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.
   (c) La représentation graphique de g admet-elle des asymptotes ?
   (d) Donner une courbe susceptible de représenter g.

<u>EXERCICE 4</u> (7 points)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{3x-7}{x^2+2x-3}$ et soit $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthogonale.

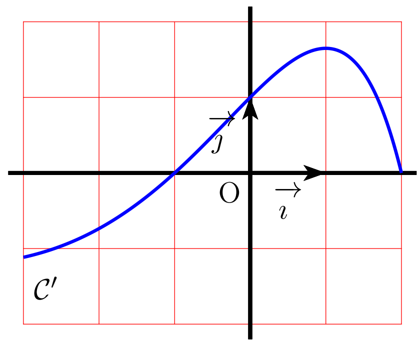
1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1; -3\}$.
2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$. Peut-on en déduire une asymptote à la courbe $\mathcal{C}$?
3. Déterminer les limites de f en 1 et -3. Peut-on en déduire une asymptote à la courbe $\mathcal{C}$?
4. Calculer $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de f.
5. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
6. Tracer $\mathcal{C}$, ses asymptotes et la tangente T.

2 Devoir n 2 Octobre 2013 2 heures

Terminale 4 et 5
Lundi 7 Octobre 2013
Calculatrices autorisées **EXERCICE 1** (4 points)
INTERROGATION ÉCRITE N 2

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\ ;\vec{i},\ \vec{j}\right)$.
On considère une fonction f dérivable sur l'intervalle $[-3\ ;\ 2]$.
On dispose des informations suivantes :

- $f(0) = -1$.
- la dérivée f' de la fonction f admet la courbe représentative $\mathcal{C}'$ ci -dessous.



Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. La représentation graphique de la fonction f admet une tangente horizontale sur $[-3; 0]$.
2. La fonction f est croissante sur l'intervalle $[-1\ ;\ 2]$.
3. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3\ ;\ 2]$, $f(x) \geqslant -1$.
4. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f.
   La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 passe par le point de coordonnées $(1\,;\,0)$.

EXERCICE 2 (4 points)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^4}{12} - \dfrac{2x^3}{9} - \dfrac{11x^2}{6} + 4x + 1$
PARTIE A :
Soit $g(x) = x^3 - 2x^2 - 11x + 12$. Vérifier que $g(x) = (x+3)(x-1)(x-4)$.
PARTIE B :

1. Déterminer le tableau de variations de f.
2. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
3. Donner un encadrement à 10^{-4} près de la plus grande des racines de $f(x)$.

EXERCICE 3 (2 points)

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x - 3\sin x}{(x+1)^2}$
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^2 + 3\cos x - \sin x$

<u>EXERCICE 4</u> (5 points)
Soi f la fonction définie par $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$ et soit $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ puis $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
   Existe-t-il des asymptotes verticales ? horizontales ?
3. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = 2x$.
   Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 2x)$. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}_f$?
4. Quelle est la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{D}$ sur $[0; +\infty[$?
5. Sachant que $f'(x) = \dfrac{x + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$, donner le tableau de variations de f.

<u>EXERCICE 5</u> (5 points)
PARTIE A :
Résoudre l'équation $\cos x = 1$ sur $\mathbb{R}$ puis sur $[\pi; 2\pi]$

PARTIE B :
Soit $f : x \mapsto \dfrac{\cos x}{\cos x - 1}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Donner son domaine de définition.
2. Étudier la limite de f en 0. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}_f$?
3. Montrer que f est périodique de période 2π, et qu'elle est paire.
4. Étudier les variations de f sur $]0; \pi]$ et donner son tableau de variations.
5. Tracer $\mathcal{C}_f$ sur $]0; \pi]$, ainsi que sa tangente au point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$.
6. Expliquer comment en déduire le tracé de $\mathcal{C}_f$ sur $\mathbb{R}$. Effectuer ce tracé.

3 Devoir n 3 Novembre 2013 2 heures

Terminale 5
Mercredi 13 Novembre 2013
Calculatrice autorisée.
INTERROGATION ÉCRITE N 3

EXERCICE 1 (8 points)
On considère les fonctions f et g définies pour tout réel x par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x \quad \text{et} \quad g(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}.$$

Les courbes représentatives de ces fonctions dans un repère orthogonal du plan, notées respectivement $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, sont fournies en annexe.

Partie A

Ces courbes semblent admettre deux tangentes communes. Tracer aux mieux ces tangentes sur la figure de l'annexe.

Partie B

Dans cette partie, on admet l'existence de ces tangentes communes.
On note $\mathcal{D}$ l'une d'entre elles. Cette droite est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse a et tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point B d'abscisse b.

1. (a) Exprimer en fonction de a le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A.
   (b) Exprimer en fonction de b le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point B.
   (c) En déduire que $b = -a$.
2. Démontrer que le réel a est solution de l'équation

$$2(x-1)\mathrm{e}^x + 1 = 0.$$

Partie C

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = 2(x-1)\mathrm{e}^x + 1.$$

1. (a) Calculer les limites de la fonction φ en $-\infty$ et $+\infty$.
   (b) Calculer la dérivée de la fonction φ, puis étudier son signe.
   (c) Dresser le tableau de variation de la fonction φ sur $\mathbb{R}$. Préciser la valeur de $\varphi(0)$.
2. (a) Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.
   (b) On note α la solution négative de l'équation $\varphi(x) = 0$ et β la solution positive de cette équation.
   À l'aide d'une calculatrice, donner les valeurs de α et β arrondies au centième.

Partie D

On note E le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse α et F le point de la courbe $\mathcal{C}_g$ d'abscisse $-\alpha$ (α est le nombre réel défini dans la partie C).

1. Démontrer que la droite (EF) est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point E.
2. Démontrer que (EF) est tangente à $\mathcal{C}_g$ au point F.

<u>**EXERCICE 2**</u> (8 points)

Partie 1

Soit g la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + 1$.

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction g.
3. Donner le tableau de variations de g.
4. (a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[0\ ;\ +\infty[$ une unique solution. On note α cette solution.

   (b) À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

   (c) Démontrer que $\mathrm{e}^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.
5. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie 2

Soit A la fonction définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ telle que $A(x) = \dfrac{4x}{\mathrm{e}^x + 1}$.

1. Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$, où g est la fonction définie dans la partie 1.
2. En déduire les variations de la fonction A sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Partie 3

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4}{\mathrm{e}^x + 1}$.

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Pour tout réel x positif ou nul, on note :

M le point de $(\mathcal{C})$ de coordonnées $(x\ ;\ f(x))$,

P le point de coordonnées $(x\ ;\ 0)$,

Q le point de coordonnées $(0\ ;\ f(x))$.

1. Démontrer que l'aire du rectangle OPMQ est maximale lorsque M a pour abscisse α.
   On rappelle que le réel α a été défini dans la partie 1.
2. Le point M a pour abscisse α.
   La tangente (T) en M à la courbe $(\mathcal{C})$ est-elle parallèle à la droite (PQ) ?
   <u>Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.</u>

<u>EXERCICE 3</u> (4 points)

Le but de cet exercice est de montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sin x}{x} \text{ si } x \text{ est un réel non nul} \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

est dérivable au point 0 et de calculer $f'(0)$.

1. Prouver que, pour tout nombre $x \geqslant 0$ on a $0 \leqslant x - \sin x \leqslant \dfrac{x^3}{6}$.

   Indication : on utilisera les fonctions $g(x) = \sin x - x$ et $h(x) = \sin x - x + \dfrac{x^3}{6}$. On calculera les dérivées $h'; h''; h'''$ et on en déduira le signe de h.

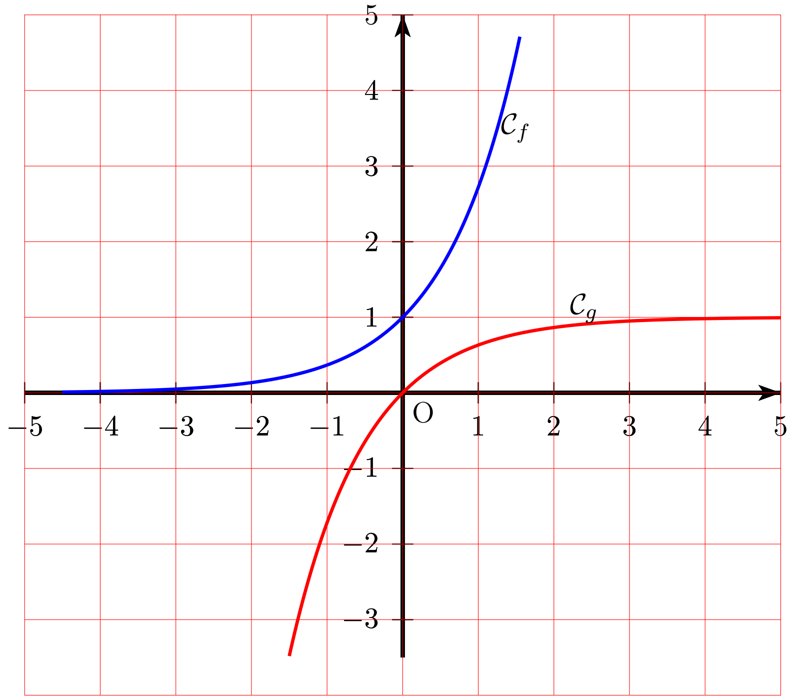
2. Quelle est la limite de $\dfrac{f(x) - 1}{x}$ quand x tend vers 0 ?.

3. Conclusion.

Annexe

Ã rendre avec la copie

Exercice 2



4 Devoir n 4 Décembre 2013 3 heures

Décembre 2013 — 3 heures, calculatrice autorisée — Terminales 4 et 5.

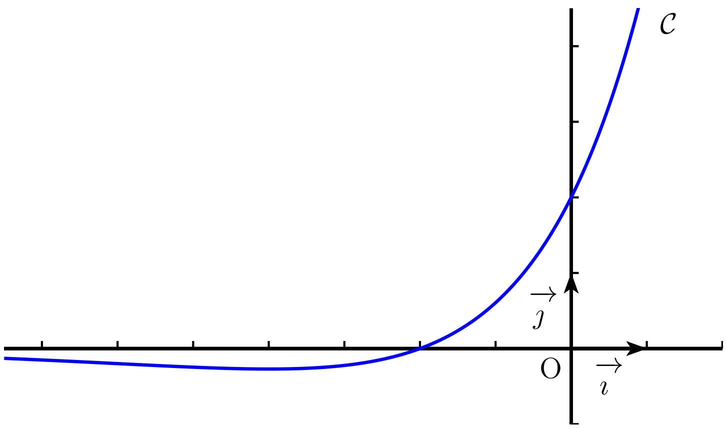
Devoir N°4

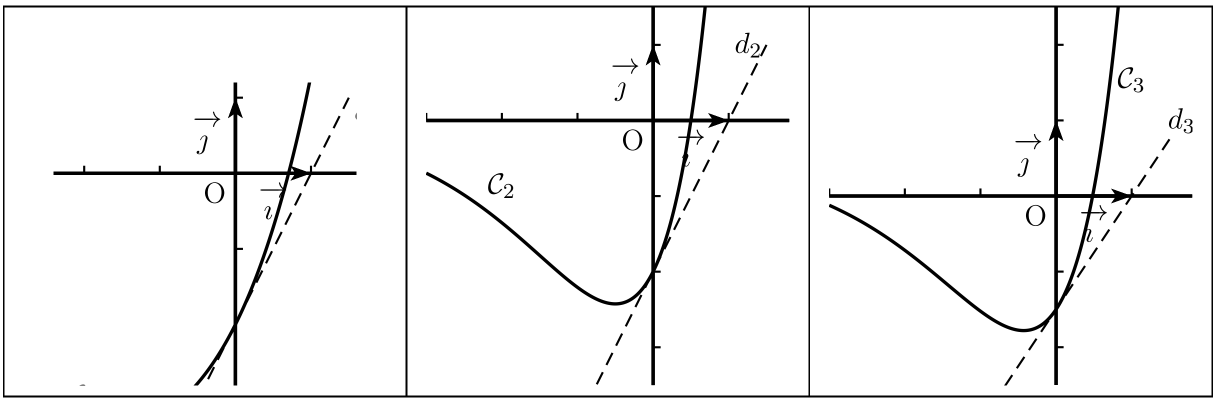
EXERCICE 1 (4 points)

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O} ; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Partie A

Sur les graphiques ci-dessous, on a représenté la courbe $\mathcal{C}$ et trois autres courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ avec la tangente en leur point d'abscisse 0.





1. Donner par lecture graphique, le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.
2. On désigne par F une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$. (C'est à dire que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $F' = f$).
   (a) À l'aide de la courbe $\mathcal{C}$, déterminer $F'(0)$ et $F'(-2)$.
   (b) L'une des courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ est la courbe représentative de la fonction F.
   Déterminer laquelle en justifiant l'élimination des deux autres.

Partie B

Dans cette partie, on admet que la fonction f évoquée dans la **partie A** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}.$$

1. L'observation de la courbe $\mathcal{C}$ permet de conjecturer que la fonction f admet un minimum.
   (a) Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{1}{2}(x+4)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$.
   (b) En déduire une validation de la conjecture précédente.
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse -2.

EXERCICE 2 (6 points)

Partie A : Restitution organisée des connaissances

On rappelle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$. Démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x - \dfrac{\ln(x)}{x}$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$.

1. Soit g la fonction définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = x^2 - 1 + \ln(x)$.
   Montrer que la fonction g est positive sur $[1\ ;\ +\infty[$.
2. (a) Montrer que, pour tout x de $[1\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
   (b) En déduire le sens de variation de f sur $[1\ ;\ +\infty[$.
   (c) Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.
   (d) Étudier la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite $\mathcal{D}$.
3. Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on note respectivement M_k et N_k les points d'abscisse k de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.
   (a) Montrer que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, la distance M_kN_k entre les points M_k et N_k est donnée par $M_kN_k = \dfrac{\ln(k)}{k}$.
   (b) On donne l'algorithme ci dessous :

Variables :	a est un nombre réel.
	n est un entier naturel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 2.
	Affecter à a la valeur $\dfrac{\ln 2}{2}$
Traitement :	Tant que $a > 0,01$
	Affecter à n la valeur $n+1$.
	Affecter à a la valeur $\dfrac{\ln n}{n}$.
	Fin de Tant que.
Sortie :	Afficher n.

   Indiquer ce que fait cet algorithme.

EXERCICE 3 (6 points)

Indiquer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses. Les réponses devront être justifiées.

1. $\ln 2\sqrt{2}e^3 - \ln 8 = \dfrac{6 - \ln 2}{2}$

2. L'inéquation $\ln(x^2 - 3x - 2) \leq \ln(1 - x)$ a pour solutions $]-1;3[$.

3. $\dfrac{\ln x}{x^2 + 1}$ et $1 + x^2 - 2x^2 \ln x$ ont même limite quand x tend vers 0.

4. $e^x - x - \ln x - \dfrac{3}{2} > 0$ sur $]1;+\infty[$.

5. Tous les élèves doués s'appellent Bob. Or Bob n'est pas doué. Donc Bob n'est pas un élève.

6. Soit $f(x) = \dfrac{e^{-x} + 3e^x}{1 + e^{-x}}$.

   Seules deux formes parmi les trois ci-dessous sont égales à $f(x)$ pour tout réel x :

   $\dfrac{1 + 3e^{2x}}{1 + e^x}$ $\qquad$ $3e^x - \dfrac{3 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$ $\qquad$ $\dfrac{e^x + 3e^{3x}}{1 + e^x}$

EXERCICE 4 POUR LES SPÉCIALISTES (4 points)

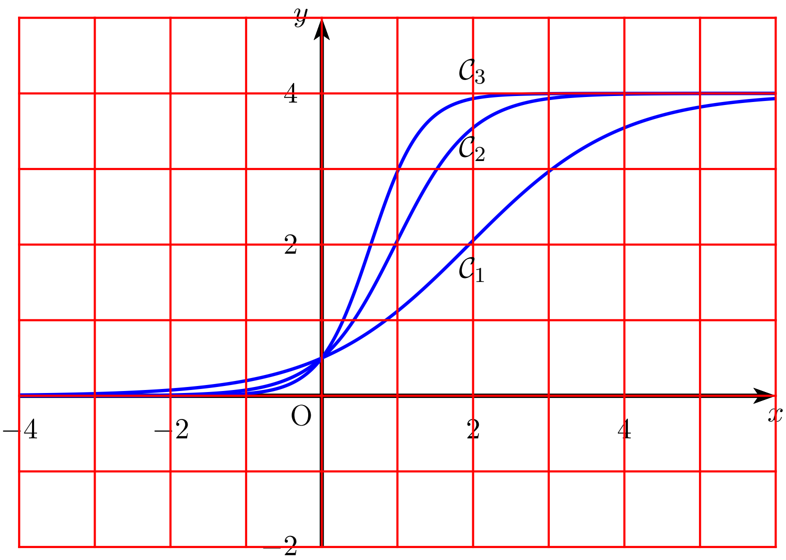
1. Montrer que $x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x + 1)$ pour tout x réel et tout naturel n.
2. En déduire qu'on peut factoriser $x^{pq} - 1$ par $x^p - 1$ pour tout réel x et tous naturels p et q.
3. Démontrer que si $2^n - 1$ est premier alors n est premier.
4. La réciproque est-elle vraie ?

EXERCICE 4 POUR LES NON SPÉCIALISTES (4 points)

A chaque entier naturel n non nul, on associe la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{4\mathrm{e}^{nx}}{\mathrm{e}^{nx} + 7}.$$

On désigne par $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$. Les courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ sont données ci-dessous :



Partie A : Étude de la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = \dfrac{4\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x} + 7}$

1. Démontrer que la courbe $\mathcal{C}_1$ admet deux asymptotes dont on précisera des équations.
2. Démontrer que la fonction f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que pour tout réel x, $0 < f_1(x) < 4$.

Partie B : Étude de certaines propriétés de la fonction f_n.

1. Démontrer que pour chaque entier naturel n non nul le point $\mathrm{A}\left(0\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$ appartient à la courbe $\mathcal{C}_n$
2. Démontrer que pour chaque entier naturel n non nul la courbe $\mathcal{C}_n$ et la droite d'équation $y = 2$ ont un unique point d'intersection dont on précisera l' abscisse. On note I_n ce point d'intersection.
3. Démontrer que $f_n'(x) = \dfrac{28ne^{nx}}{(e^{nx} + 7)^2}$.
4. On note (T_n) la tangente à à la courbe $\mathcal{C}_n$ au point I_n. Démontrer que les droites (T_n) coupent toutes l'axe des ordonnées au même point.

5 Devoir n 5 Janvier 2014 3 heures

Janvier 2014 — 3 heures, calculatrice autorisée — Terminales 4 et 5.

Devoir N°5

EXERCICE 1 (4 points)
Dans cet exercice on travaillera sur la représentation graphique donnée en annexe.
La courbe $\mathcal{C}_f$ représente une fonction f sur l'intervalle $[-0,5;3,5]$.
On sait que $f(1)=2$.
La droite T_0 est la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
La droite T_1 est la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

1. A-t-on l'égalité $f'(0)=-6f'(1)$?.
2. On considère la fonction g définie par $g(x)=\ln(f(x))$.
   (a) Quel est le domaine de définition de g ?
   (b) Déterminer $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} g(x)$.
   (c) Donner une équation de la tangente à la courbe de la fonction g au point d'abscisse 1.
3. Justifier que la fonction g admet un maximum positif sur $]0;2[$.

EXERCICE 2 (5 points)
Dans un repère orthonormé direct $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$, on considère le point A d'affixe $z_A=1$ et le point B d'affixe $z_B=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Vérifier que $z^4+z^2+1=(z^2+1)^2-z^2$.
2. En déduire les solutions de l'équation $z^4+z^2+1=0$.
   Donner pour chacune son module et un argument.
3. Déterminer les affixes des points C, D, E, F tels que :
   $z_F=\overline{z_B} \quad z_C=-z_F \quad z_D=-z_A \quad z_E=-z_B$
   Placer ces points.
4. Démontrer que ces points appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.
5. Quelle est la nature du triangle CEA ? En déduire une mesure de $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CE})$.

EXERCICE 3 (5 points)
Dans le plan complexe $(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ on considère les points
$A(-2) \quad B(2) \quad C(1-i) \quad D(1+i) \quad E(-1+i) \quad F(i)$.
A tout point M d'affixe z on associe le point M' d'affixe z' avec $z'=\dfrac{z-1+i}{z+2}$ pour $z\neq -2$.
On dira que M' est l'image de M.
Pour chacune des questions suivantes on donne 3 affirmations et une seule est juste. Déterminer laquelle et justifier.

1. • La forme trigonométrique de $1-i$ est $\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$
   • $(1-i)^4$ est un réel négatif.
   • Un argument de $1-i$ est $-\frac{15\pi}{4}$
2. • L'image du point B est le point D
   • Le point F est invariant
   • L'image de point D est sur l'axe des imaginaires purs.
3. • $Re(z') = \dfrac{x^2+y^2+x+y-2}{(x+2)^2+y^2}$
   • $Im(z') = \dfrac{-2}{z^2-4}$
   • $Re(z') = \dfrac{x^2-y^2+x+y-2}{(x+2)^2+y^2}$
4. L'ensemble des points $M(z)$ tels que z' est un imaginaire pur est :
   • Le cercle de diamètre $[AC]$ privé de A
   • Le cercle de centre $\Omega\left(\dfrac{-1-i}{2}\right)$ et de rayon $\dfrac{5}{2}$
   • L'ensemble vide
5. L'interprétation géométrique du module de $\dfrac{z-1+i}{z+2}$ est
   • $\dfrac{CM}{AM}$
   • $\dfrac{DM}{BM}$
   • $\dfrac{EM}{BM}$

EXERCICE 4 (6 points)

Pour $k \in \mathbb{R}^*$, soit f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = e^{kx} - x$ et soit $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de f_k dans $\left(O\,;\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$

Partie A :

1. Calculer $f_k'(x)$.
2. Montrer que si f_k possède un extremum alors $k > 0$.

Partie B : Soit $k < 0$

1. Déterminer les variations de f_k.
2. Déterminer la limite de f_k en $-\infty$.
3. Déterminer la limite de f_k en $+\infty$ et montrer que la droite $\delta : y = -x$ est asymptote à C_k en $+\infty$. Préciser la position de C_k par rapport à δ.

Partie C : Soit $k > 0$

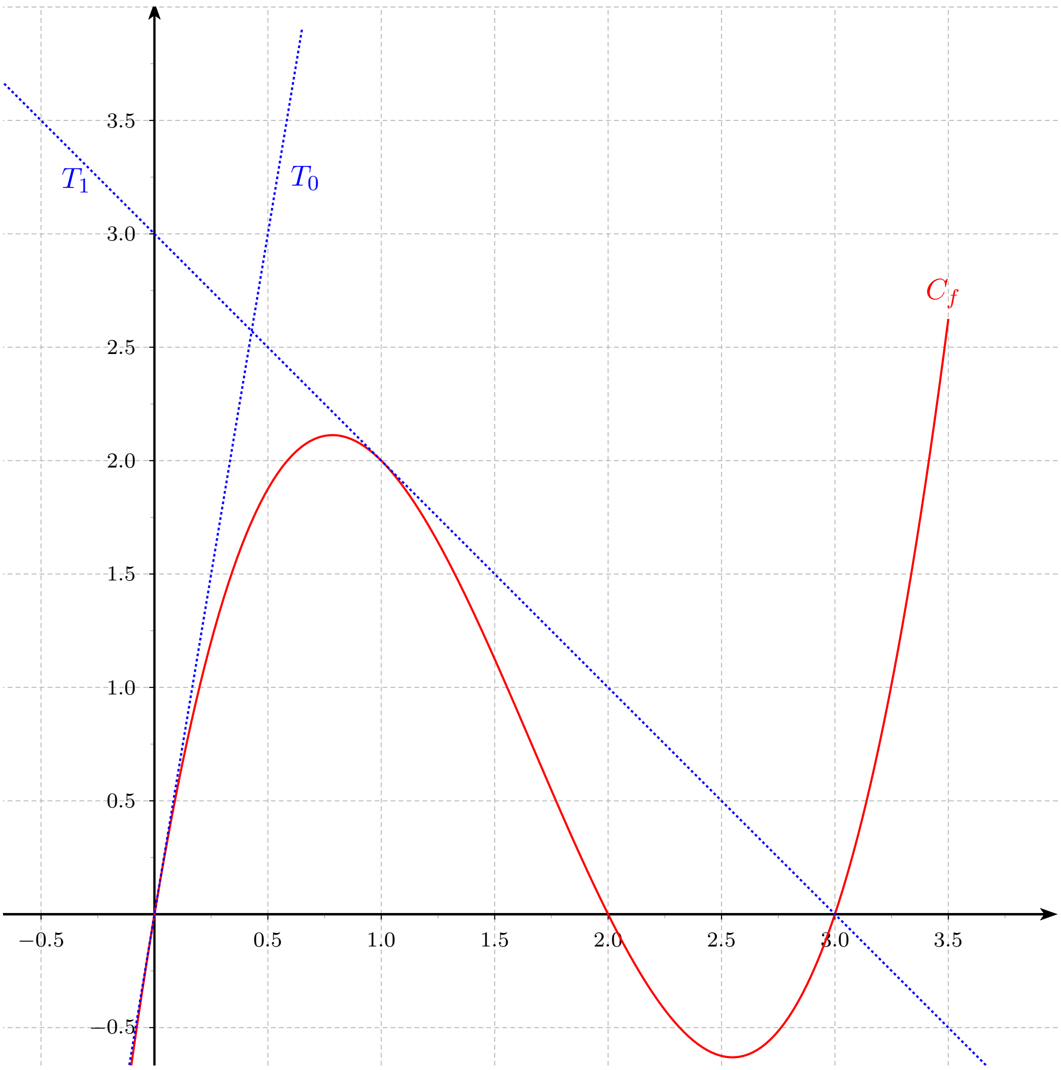
1. Déterminer les variations de f_k.
2. Déterminer la limite de f_k en $-\infty$ et en $+\infty$ (On remarquera que $e^{kx} - x = x\left(k\dfrac{e^{kx}}{kx} - 1\right)$)
3. La droite $\delta : y = -x$ est-elle asymptote à C_k ?.
4. Déterminer le tableau de variation de f_k.
   f_k possède-t-elle un extremum ? Le déterminer.

Partie D :

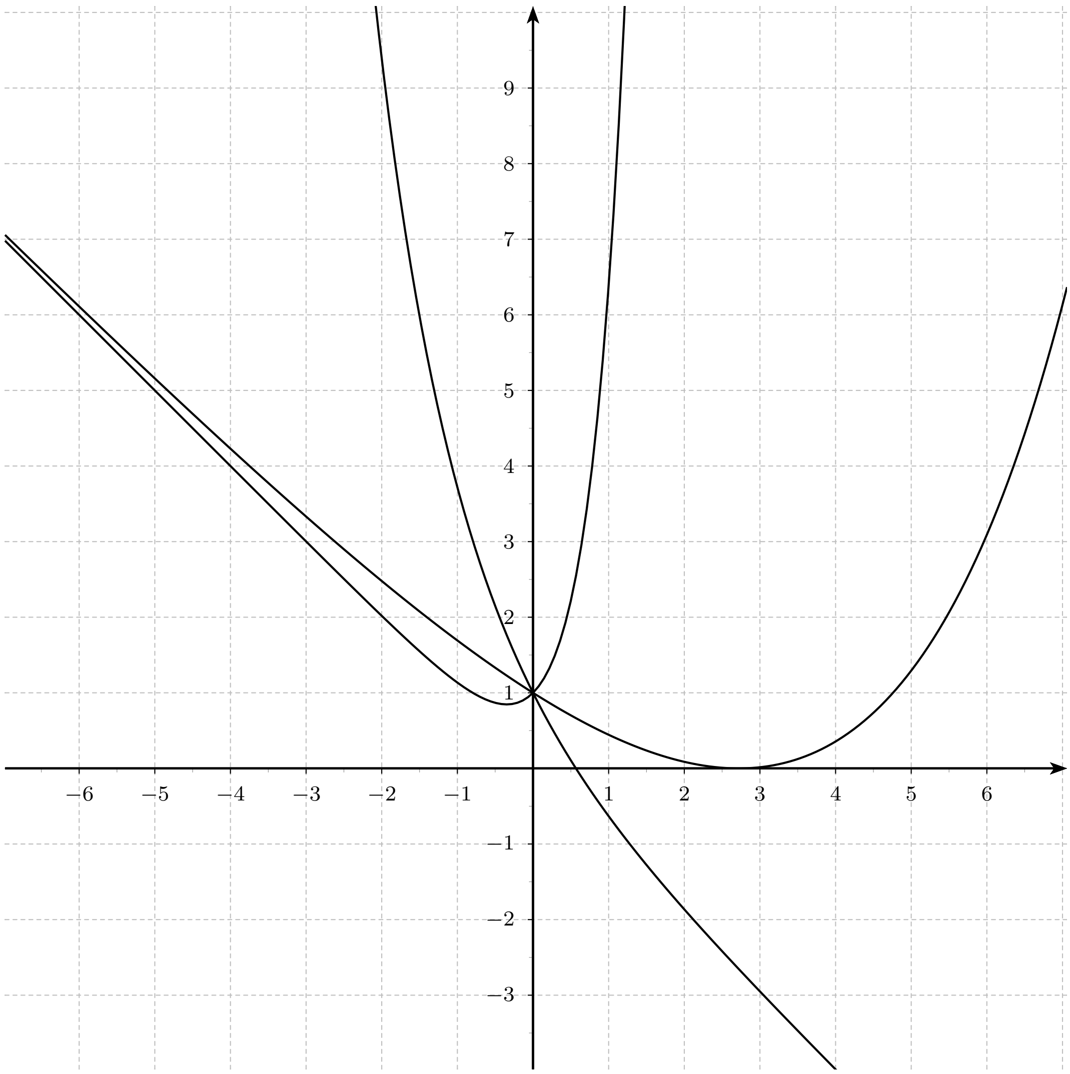
On a représenté en annexe les courbes C_k pour $k = 2, k = \dfrac{1}{e}, k = -1$.
Identifier chacune des courbes. Justifier votre réponse.

Nom :
Prénom :
Classe :

Exercice 1



Exercice 4



6 Devoir n 6 Février 2014 4 heures

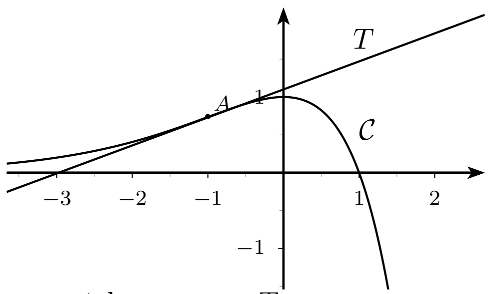
Terminales 4,5 et 10
Mercredi 5 Février 2014
Calculatrice autorisée.
DEVOIR 6 : BAC BLANC

EXERCICE 1 (5 points)
Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $\left(\text{O},\ \vec{u}\ ,\ \vec{v}\right)$ d'unité 4 cm, on considère le point A d'affixe $2-i$; le point B d'affixe $-2i$ et le point C d'affixe $-i$.
Soit f l'application qui à tout point M d'affixe z, distinct du point B, associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \dfrac{z-2+i}{z+2i}$

1. On pose $z = x+iy$ avec x et y réels.
   (a) Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction de x et y.
   On vérifiera que $Re(z') = \dfrac{x^2+y^2-2x+3y+2}{x^2+(y+2)^2}$
   (b) En déduire l'ensemble $\mathcal{E}$ des points $M(z)$ tel que z' soit un imaginaire pur.
   (c) Représenter $\mathcal{E}$.
2. (a) Résoudre l'équation $\dfrac{z-2+i}{z+2i} = -i$
   (b) En déduire que le point C est l'image d'un seul point D par f. Donner l'affixe de D.
   (c) Vérifier que D est un point de $\mathcal{E}$.
3. (a) Montrer que $OM' = \dfrac{AM}{BM}$.
   (b) En déduire l'ensemble $\mathcal{F}$ des points $M(z)$ tels que M' soit sur le cercle de centre O et de rayon 1. Représenter $\mathcal{F}$.
4. Calculer $|z'-1| \times |z+2\mathrm{i}|$, et en déduire que les points M' d'affixe z', lorsque le point M d'affixe z parcourt le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{5}$, sont tous sur un même cercle dont on précisera le rayon et l'affixe du centre.

EXERCICE 2 NON SPÉCIALITÉ (5 points)
Les parties A et B sont indépendantes.

PARTIE A
Dans un repère orthonormé, on a tracé la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1-x)\mathrm{e}^x$ et sa tangente T au point A d'abscisse -1.



On se propose d'étudier la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la tangente T.
Pour cela, on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (1-x)\mathrm{e}^x - \dfrac{1}{e}(x+3)$.

1. Calculer $g'(x)$ et $g''(x)$ pour tout réel x (la fonction g'' est la fonction dérivée de la fonction g').
2. Étudier le sens de variation de la fonction g' et préciser $g'(-1)$.

3. En déduire le sens de variation de g et conclure.

PARTIE B

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. Soit z un nombre complexe non nul.

   Proposition : Si z est un imaginaire pur alors $|\mathrm{i} + z| = 1 + |z|$.
2. Soit z un nombre complexe non nul.

   Proposition : Si le module de z est égal à 1 alors $z^2 + \dfrac{1}{z^2}$ est un nombre réel.

EXERCICE 2 SPÉCIALITÉ (5 points)

1. On considère le système de congruences :

$$(S)\left\{\begin{array}{lcll} n & \equiv & 2 & \text{(modulo 3)} \\ n & \equiv & 1 & \text{(modulo 5)} \end{array}\right., \text{ où } n \text{ désigne un entier relatif.}$$

   (a) Montrer que 11 est solution de (S).

   (b) Montrer que si n est solution de (S) alors $n - 11$ est divisible par 3.

   (c) Montrer, à l'aide du théorème de Gauss, que si a et b sont deux entiers premiers entre eux qui divisent un entier n, alors ab divise n.

   (d) Montrer que, si n est solution de (S), alors il existe un entier relatif k tel que $n = 11 + 15k$.

   (e) Montrer que les solutions de (S) sont tous les entiers de la forme $11+15k$, où k désigne un entier relatif.

2. Les questions sont indépendantes.
   Pour chaque question une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.
   Toute trace de recherche sera valorisée.

   (a) Soit a et b deux nombres entiers relatifs non nuls.

   Proposition : « S'il existe un couple de nombres entiers relatifs $(u,\ v)$ tel que $ua + vb = 3$, alors $\mathrm{PGCD}(a,\ b) = 3$ ».

   (b) **Proposition :** « Si un entier naturel n est congru à 1 modulo 7 alors le PGCD de $3n + 4$ et de $4n + 3$ est égal à 7 ».

EXERCICE 3 (3 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n + 1.$$

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.
2. En déduire le comportement de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
3. On considère l'algorithme suivant :

Variables	A et U sont des nombres réels, N est un entier naturel
Initialisation	N prend la valeur 0
	U prend la valeur 1
Entrée	Saisir la valeur de A
Traitement	Tant que U $\leqslant$ A
	N prend la valeur N + 1
	U prend la valeur $\frac{3}{2}$U + 1
	Fin tant que
Sortie	Afficher N

(a) Reproduire et compléter le tableau suivant en faisant fonctionner cet algorithme pour A = 10.

N	0						
U	1						

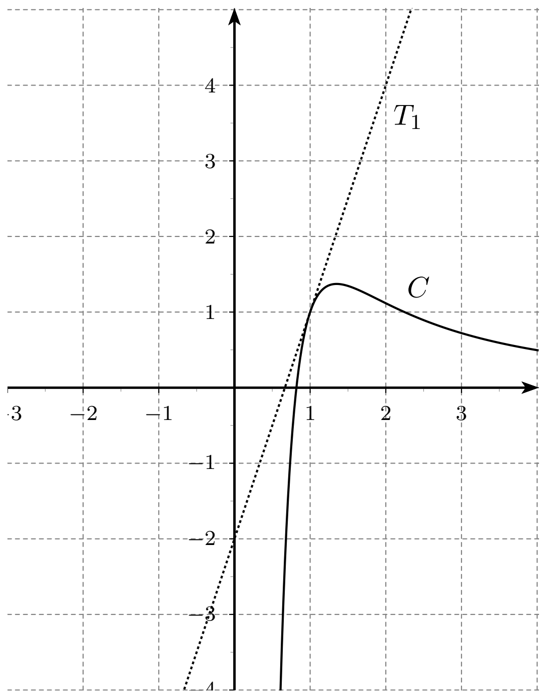
(b) A quoi correspond l'affichage final ?

(c) Pourquoi est-on sur que l'algorithme s'arrête ?

EXERCICE 4 (7 points)

PARTIE A :

La courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous représente une fonction h définie sur $]0;+\infty[$.
La courbe $\mathcal{C}$ passe par le point $A(1;1)$ et T_1 est tangente à $\mathcal{C}$ en A.



On sait qu'il existe a et $b \in \mathbb{R}$ tel que $h(x) = \dfrac{a + b\ln x}{x^2} \quad \forall x \in]0;+\infty[$.

1. Déterminer a et b.
2. Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{1 + 5\ln x}{x^2}$.

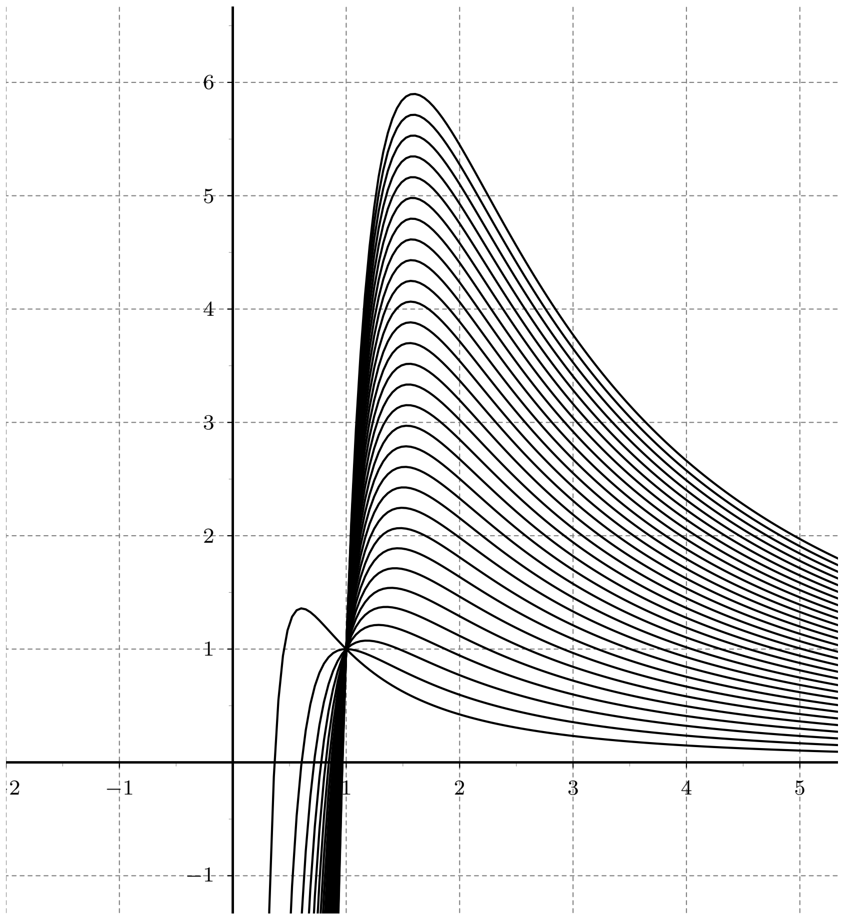
   (a) Vérifier g possède un maximum.

(b) Vérifier que sa courbe admet deux asymptotes que l'on déterminera.On pourra remarquer que $g(x) = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x} + 5\dfrac{\ln x}{x}\right)$.

PARTIE B :

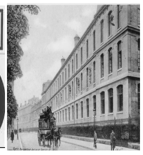
Pour n entier naturel non nul, on considère la fonction f_n définie sur $]0;+\infty[$ par $f_n(x) = \dfrac{1 + n\ln x}{x^2}$. On appelle C_n sa courbe tracée dans un repère orthonormé.

1. Déterminer les limites de f_n en 0 et $+\infty$.
2. Montrer que $f_n'(x) = \dfrac{n - 2 - 2n\ln x}{x^3}$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f_n.
   Montrer que pour tout entier n naturel non nul, cette fonction admet un maximum en un réel $a_n > 0$.
4. Calculer la valeur de ce maximum b_n.
5. On a tracé ci après les courbes des fonctions f_n pour $1 \leqslant n \leqslant 30$.
   Conjecturer les limites des suites (a_n) et (b_n).
6. Démontrer que toutes les courbes C_n passent par un point fixe dont on déterminera les coordonnées.
7. Calculer les limites des suites (a_n) et (b_n).



7 Devoir n 7 Mars 2014 3 heures

Terminale 5
Lundi 17 Mars 2014
Calculatrice autorisée.
DEVOIR 7



<u>EXERCICE 1</u> (7 points)

Partie A
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{1-x}.$$

1. Vérifier que pour tout réel x, $f(x) = \mathrm{e} \times \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$.
2. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
3. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.
4. Déterminer la dérivée de la fonction f.
5. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variation.

Partie B

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les fonctions g_n et h_n définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n \quad \text{et} \quad h_n(x) = 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1}.$$

1. Vérifier que, pour tout réel x : $(1-x)g_n(x) = 1 - x^{n+1}$.
   On obtient alors, pour tout réel $x \neq 1$: $g_n(x) = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$.
2. Comparer les fonctions h_n et g'_n, g'_n étant la dérivée de la fonction g_n.
   En déduire que, pour tout réel $x \neq 1$: $h_n(x) = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$.
3. Soit $S_n = f(1) + f(2) + ... + f(n)$, f étant la fonction définie dans la partie A.
   En utilisant les résultats de la **partie B**, déterminer une expression de S_n puis sa limite quand n tend vers $+\infty$.

<u>EXERCICE 2</u> NON SPÉCIALITÉ (3 points)
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.
   (b) En déduire la limite de la suite (u_n).
3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
4. Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - n + 1$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

(b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n + n - 1$.

EXERCICE 2 SPÉCIALITÉ (3 points)
Vrai ou Faux ? Justifier.

1. Le plus petit entier naturel admettant exactement quinze diviseurs positifs est 144.
2. Pour n entier naturel, soit $u_n = 5 + 5^2 + 5^3 + ... + 5^n$.
   Alors 7 divise u_n si et seulement si 7 divise $5^n - 1$.
3. Soient deux suites (u_n) et (v_n) de réels, et (C_n) la suite de colonnes de dimension 2, telle que $C_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ définies par $C_{n+1} = AC_n$, où $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $C_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
   Alors $v_3 = -9$.

EXERCICE 3 (5 points)
Partie A :

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par

$$P(z) = z^3 - \left(2 + \mathrm{i}\sqrt{2}\right) z^2 + 2\left(1 + \mathrm{i}\sqrt{2}\right) z - 2\mathrm{i}\sqrt{2}.$$

1. Montrer que le nombre complexe $z_0 = \mathrm{i}\sqrt{2}$ est solution de l'équation $P(z) = 0$.
2. (a) Déterminer les réels a et b tels que $P(z) = \left(z - \mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(z^2 + az + b\right)$.
   (b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

Partie B :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. On prendra 2 cm pour unité graphique.
On considère les points A, B, J et K d'affixes respectives :

$$z_{\mathrm{A}} = 1 + \mathrm{i}, \quad z_{\mathrm{B}} = 1 - \mathrm{i}, \quad z_{\mathrm{J}} = \mathrm{i}\sqrt{2} \quad \text{et } z_{\mathrm{K}} = \mathrm{e}^{\frac{3\mathrm{i}\pi}{4}}.$$

1. Placer les points A, B, J, K sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.
2. Soit L le symétrique du point J par rapport au point K. Montrer que l'affixe de L est égale à $-\sqrt{2}$.
3. Montrer que les points A, B, J et L appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

EXERCICE 4 (5 points)
Dans cet exercice, les résultats approchés seront donnés à $0,0001$ près.

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.
Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont $1\,\%$ est porteur de la maladie.
On obtient les résultats suivants :

- si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans $85\,\%$ des cas ;
- si un animal est sain, le test est négatif dans $95\,\%$ des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour la population entière et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.
On note :

M l'évènement : « l'animal est porteur de la maladie » ;

T l'évènement : « le test est positif ».

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.
2. Un animal est choisi au hasard.
   (a) Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie et que son test soit positif ?
   (b) Montrer que la probabilité pour que son test soit positif est $0,058$.
3. Un animal est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité pour qu'il soit porteur de la maladie ?
4. On choisit cinq animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise. On note X la variable aléatoire qui, aux cinq animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.
   (a) Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?
   (b) Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des cinq animaux ait un test positif ?
5. Le coût des soins à prodiguer à un animal ayant réagi positivement au test est de 100 euros et le coût de l'abattage d'un animal non dépisté par le test et ayant développé la maladie est de 1000 euros. On suppose que le test est gratuit.

   D'après les données précédentes, la loi de probabilité du coût à engager par animal subissant le test est donnée par le tableau suivant :

Coût	0	100	1000
Probabilité	0,9405	0,0580	0,0015

   (a) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire associant à un animal le coût à engager.
   (b) Un éleveur possède un troupeau de 200 bêtes. Si tout le troupeau est soumis au test, quelle somme doit-il prévoir d'engager ?

8 Devoir n 8 Avril 2014 4 heures

Baccalauréat blanc 2013-2014
Lycée Janson de Sailly
Epreuve de Mathématiques Série S
durée : 4 heures

L'usage de la calculatrice est autorisé

Le numéro de la classe devra figurer dans la partie anonymée.

Indiquez en tête de la copie si vous avez ou non suivi l'enseignement de spécialité mathématiques.

L'annexe est à remettre avec la copie.

Faire figurer sur la feuille annexe seulement vos initiales.

La feuille annexe devra être numérotée comme les autres feuilles.

Exercice 1 (5 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. On justifiera la réponse.

1. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = -1$, $b = \mathrm{i}$ et $c = \sqrt{3} + \mathrm{i}(1 - \sqrt{3})$.
   Affirmation : le triangle ABC est rectangle en B.
2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $a = -1$ et $b = \mathrm{i}$.
   Affirmation : l'ensemble des points d'affixe z tels que $\left|\dfrac{z - \mathrm{i}}{z + 1}\right| = 1$ est le cercle de diamètre $[AB]$ privé du point A.
3. On considère le nombre complexe $z = (-\sqrt{3} + \mathrm{i})^6$.
   Affirmation : Le nombre complexe z est un imaginaire pur.
4. On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z + |z|^2 = 7 + \mathrm{i}$.
   Affirmation : Cette équation admet deux solutions distinctes.
5. On considère l'équation (E) suivante : $z^2 + z + 1 = 0$.
   Affirmation : l'équation (E) a deux solutions complexes de modules égaux à 1.

Exercice 2 (5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(\mathrm{e}^x + 2)$.
La courbe $(\mathcal{C})$ représentative de la fonction f dans un repère orthogonal est donnée en annexe.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A - Étude de la fonction f.

1. Etudier la limite de f en $-\infty$ et interpréter graphiquement cette limite.
2. Etudier la limite de f en $+\infty$.
3. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

Partie B - Encadrement d'une intégrale.

On pose $I = \displaystyle\int_2^3 [f(x) - x]\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = x + \ln(1 + 2\mathrm{e}^{-x})$.
   Etudier la position relative de $(\mathcal{C})$ et de la droite (d) d'équation $y = x$.
   Tracer la droite (d) sur la feuille annexe
2. On pose $I = \displaystyle\int_2^3 [f(x) - x]\,\mathrm{d}x$.
   (a) Donner une interprétation géométrique de I.
   (b) Montrer que, pour tout $X \in [0\ ;\ +\infty[$, $\ln(1 + X) \leqslant X$.
   En déduire que, pour tout x réel, $\ln(1 + 2\mathrm{e}^{-x}) \leqslant 2\mathrm{e}^{-x}$.
   (c) Démontrer que $0 \leqslant I \leqslant \displaystyle\int_2^3 2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.
   (d) Donner la valeur exacte de $\displaystyle\int_2^3 2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ et en déduire un encadrement de I d'amplitude 0,2.

Exercice 3 (5 points)

Tous les résultats seront arrondis à $\mathbf{10^{-2}}$près.

Une entreprise produit en grande quantité des stylos. La probabilité qu'un stylo présente un défaut est égale à $0,1$.

1. On prélève dans cette production, successivement et avec remise huit stylos. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de stylos présentant un défaut parmi les huit stylos prélevés.
   (a) On admet que X suit une loi binomiale. Donner les paramètres de cette loi.
   (b) Calculer la probabilité des événements suivants :
   A : « il n'y a aucun stylo avec un défaut » ;
   B : « il y a au moins un stylo avec un défaut » ;
   C : « il y a exactement deux stylos avec un défaut ».
2. En vue d'améliorer la qualité du produit vendu, on décide de mettre en place un contrôle qui accepte tous les stylos sans défaut et 20 % des stylos avec défaut.
   On prend au hasard un stylo dans la production. On note D l'événement « le stylo présente un défaut », et E l'événement « le stylo est accepté ».
   (a) Construire un arbre traduisant les données de l'énoncé.
   (b) Calculer la probabilité qu'un stylo soit accepté au contrôle.
   (c) Justifier que la probabilité qu'un stylo ait un défaut sachant qu'il a été accepté au contrôle est égale à $0,022$ à 10^{-3} près.
3. Après le contrôle, on prélève, successivement et avec remise, huit stylos parmi les stylos acceptés.

   Calculer la probabilité qu'il n'y ait aucun stylo avec un défaut dans ce prélèvement de huit stylos.

Exercice 4 (5 points)

Uniquement pour les élèves n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = -1,\ u_1 = \frac{1}{2} \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

1. On donne l'algorithme suivant :

Variables :	a, b et c sont des nombres réels
	i et n sont des nombres entiers naturels supérieurs ou égaux à 2
Initialisation	a prend la valeur -1
	b prend la valeur $\frac{1}{2}$
Traitement :	Saisir n
	Pour i variant de 2 à n faire
	c prend la valeur a
	a prend la valeur b
	b prend la valeur $a - \frac{1}{4}c$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher b

Quelle est la valeur affichée lorsqu'on saisit $n = 3$? Que calcule cet algorithme ?

2. On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n :

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n.$$

   (a) Calculer v_0.

   (b) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

   (c) Exprimer v_n en fonction de n.

3. On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n :

$$w_n = \frac{u_n}{v_n}.$$

   (a) Calculer w_0.

   (b) En utilisant l'égalité $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$, exprimer w_{n+1} en fonction de u_n et de v_n.

   (c) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n + 2$.

   (d) Exprimer w_n en fonction de n.

4. Montrer que pour tout entier naturel n

$$u_n = \frac{2n-1}{2^n}.$$

5. Pour tout entier naturel n, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

   Démontrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}.$$

Exercice 4 (5 points)

Uniquement pour les élèves ayant suivi l'enseignement de spécialité
Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Soit n un entier naturel non nul.
On considère les nombres a et b tels que :

$$a = 2n^3 + 5n^2 + 4n + 1 \text{ et } b = 2n^2 + n.$$

1. Montrer que $2n + 1$ divise a et b.
2. Un élève affirme que le PGCD de a et b est $2n + 1$.
   Son affirmation est-elle vraie ou fausse ? (La réponse sera justifiée.)

Partie B

On définit les deux suites réelles (a_n) et (b_n) sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels par :

$$a_0 = 1,\ b_0 = 2 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N} \left\{ \begin{array}{l} a_{n+1} = 6a_n - b_n \\ b_{n+1} = a_n + 4b_n \end{array} \right. .$$

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables : a, b et c des nombres réels n et k des nombres entiers Initialisation : a prend la valeur 1 b prend la valeur 2 Début de l'algorithme Entrer la valeur de n Pour k variant de 1 à n c prend la valeur a a prend la valeur $\cdots$ b prend la valeur $\cdots$ Fin du Pour Afficher a Afficher b Fin de l'algorithme

   Recopier les lignes de cet algorithme comportant des pointillés et les compléter pour qu'il affiche en sortie les valeurs de a_n et b_n.

2. Pour tout entier naturel n, on note U_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

   On note A la matrice carrée d'ordre 2 : $\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

   On a alors, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = AU_n$.

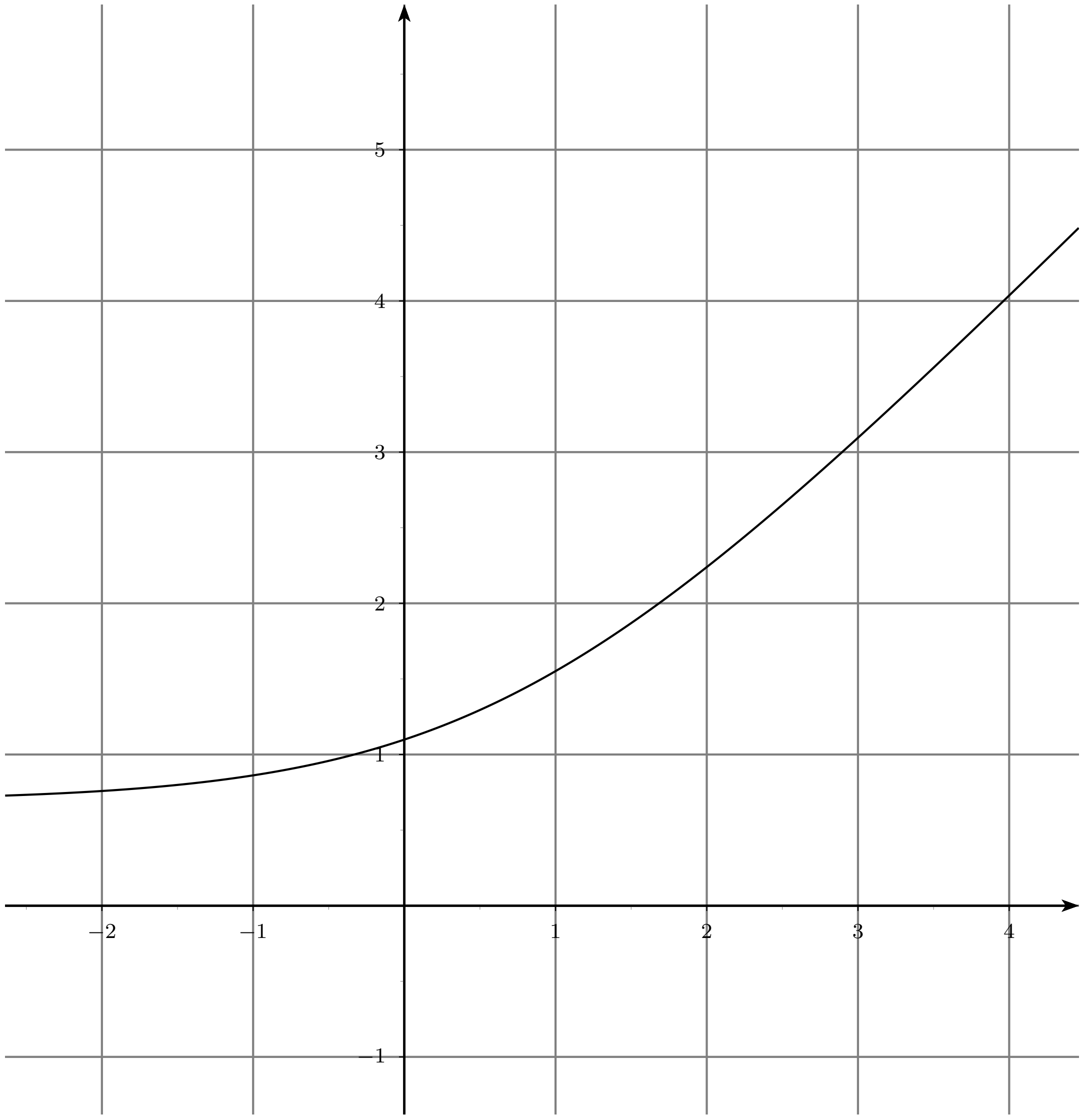
   (a) Démontrer par récurrrence que, pour tout entier naturel n, $A^n = \begin{pmatrix} 5^n + n \times 5^{n-1} & -n \times 5^{n-1} \\ n \times 5^{n-1} & 5^n - n \times 5^{n-1} \end{pmatrix}$.

   (b) On admettra que, pour tout entier naturel n, $U_n = A^n U_0$.
   En déduire une expression de a_n et une expression de b_n en fonction de n.

   (c) Etudier la limite de la suite (a_n).

Annexe

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.



9 Devoir n 9 Juin 2014 4 heures

BAC BLANC Terminales 4,5 et 10
Samedi 17 Mai 2014
Calculatrice autorisée.

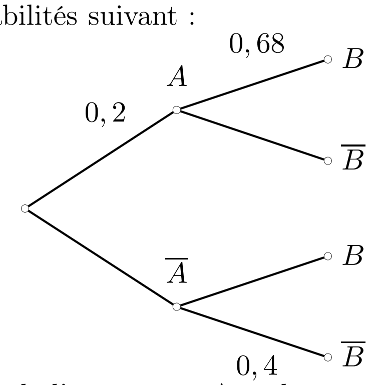
Exercice 4 (5 points)

Les cinq questions sont indépendantes.
Pour chaque question une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.
Toute trace de recherche sera valorisée.

1. Soit A et B deux événements indépendants d'un même univers Ω tels que $P(A) = 0,3$ et $P(A \cup B) = 0,65$.

   Affirmation : La probabilité de l'événement B est 0,35.

2. On considère l'arbre de probabilités suivant :



   Affirmation : La probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé est égale à 0,32.

3. Soit le nombre complexe $z = \dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}$.

   Affirmation : Un argument de z est $\dfrac{5\pi}{12}$.

   Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

4. Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z - 1 + 2\mathrm{i}| = |z + 3 - 4\mathrm{i}|$.

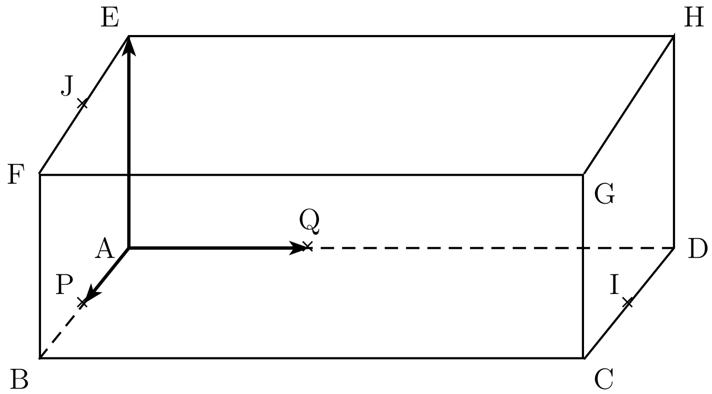
   Affirmation : $\mathscr{E}$ est une droite passant par le point H d'affixe $5 + 5\mathrm{i}$.

5. z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

   Affirmation : Les points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2 appartiennent au cercle de centre A d'affixe 1 et de rayon 1.

Exercice 5 (5 points)

Soit ABCDEFGH un parallélépipède rectangle tel que AB = 2, AD = 3 et AE = 1.
On appelle respectivement I, J et P les milieux respectifs des segments [CD], [EF] et [AB].
On note Q le point défini par $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.



On appelle **plan médiateur d'un segment** le plan perpendiculaire à ce segment et passant par son milieu.
L'objectif de l'exercice est de déterminer les coordonnées du centre d'une sphère circonscrite au tétraèdre ABIJ (c'est-à-dire une sphère qui passe par les quatre points A, B, I, J).
L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(A ; \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Justifier que les quatre points A, B, I et J ne sont pas coplanaires.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan médiateur (P_1) du segment [AB].
3. Soit (P_2) le plan d'équation cartésienne $3y - z - 4 = 0$.
   Montrer que le plan (P_2) est le plan médiateur du segment [IJ].
4. (a) Démontrer que les plans (P_1) et (P_2) sont sécants.
   (b) Montrer que leur intersection est une droite (Δ) dont une représentation paramétrique est

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1 \\ y & = & t \\ z & = & 3t - 4 \end{array}\right. \quad \text{où } t \text{ décrit l'ensemble des nombres réels } \mathbb{R}.$$

   (c) Déterminer les coordonnées du point Ω de la droite (Δ) tel que $\Omega A = \Omega I$.
   (d) Montrer que le point Ω est centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABIJ.

Exercice 6 (5 points)

Partie A : Etude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

Sur l'annexe jointe, on a tracé dans un repère orthogonal la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f ainsi que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$.

1. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en 1.
2. Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$.
3. En déduire que si $x \geqslant \text{e}$ alors $f(x) \geqslant \text{e}$.

Partie B : Etude d'une suite récurrente

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcr} u_0 & = & 5 \\ \text{pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{array}\right.$$

1. Sur l'annexe jointe, à rendre avec la copie, en utilisant la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}$, placer les points A_0, A_1 et A_2 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2. On laissera apparents les traits de construction.

   Quelles conjectures peut-on faire sur les variations et la convergence de la suite (u_n) ?
2. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant \text{e}$.

   (b) Déterminer les variations de la suite (u_n).

   (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
3. On donne l'algorithme suivant :

```
X est une variable réelle ; Y est une variable entière
Affecter 5 à X et 0 à Y
Tant que X > 2,72
    Faire
        Affecter (X/ ln X) à X
        Affecter Y + 1 à Y
Fin de Tant que
Afficher Y
```

   A l'aide du tableau suivant, obtenu avec un tableur, déterminer la valeur affichée par l'algorithme.

n	0	1	2	3	4	5
u_n	5	3,106 674 672 8	2,740 652 532 3	2,718 372 634 6	2,718 281 830 01	2,718 281 828 5

Exercice 7 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,1]$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{x}$.
On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i},\,\vec{j}\right)$.
Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$.
Sur la courbe $\mathcal{C}$, tracée en annexe, on a placé les points A et B d'abscisses respectives a et 1. On a tracé les segments [OA] et [AB]. On a hachuré la partie du plan délimitée par les segments [OA] et [AB] et la courbe $\mathcal{C}$. On a placé les points $\mathrm{A}'(a\ ;\ 0)$ et $\mathrm{B}'(1\ ;\ 0)$.
Le but de l'exercice est de déterminer la valeur du nombre réel a pour laquelle l'aire de la partie du plan hachurée en annexe est minimale.

PARTIE A :

1. Montrer la fonction F définie sur $[0;1]$ par $F(x) = (x-1)\mathrm{e}^{x}$ est une primitive de f sur $[0;1]$ et en déduire que $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = 1$.
2. (a) Donner l'aire du triangle OAA' et montrer que l'aire du trapèze ABBA' est égale à $\dfrac{1}{2}\left(-a^2\mathrm{e}^{a} + a\mathrm{e}^{a} - a\mathrm{e} + \mathrm{e}\right)$.

   (b) En déduire que l' aire de la partie du plan hachurée est égale à $\dfrac{1}{2}\left(a\mathrm{e}^{a} - a\mathrm{e} + \mathrm{e} - 2\right)$.

PARTIE B :

Soit g la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = x\left(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}\right) + \mathrm{e} - 2.$$

1. Soit g' la fonction dérivée de la fonction g. Calculer $g'(x)$ pour tout réel x de $[0\ ;\ +\infty[$.
   Vérifier que la fonction dérivée seconde g'' (g'' est la fonction dérivée de la fonction g') est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par
   $g''(x) = (2+x)\mathrm{e}^{x}$.
2. En déduire les variations de la fonction g' sur $[0\ ;\ +\infty[$.
3. Etablir que l'équation $g'(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
4. En déduire les variations de la fonction g sur $[0\ ;\ +\infty[$.
5. En utilisant les réponses aux questions des parties A et B, montrer qu'il existe une valeur de a pour laquelle l'aire de la partie du plan hachurée est minimale. Donner cette valeur de a.