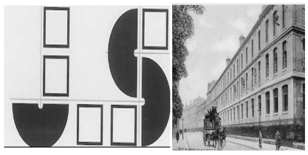
Terminale 8 sujets
Année 2015-2016

Ph DEPRESLE

19 mai 2016

Table des matières

1 Devoir n 1 Septembre 2015 2 heures



Terminale 8
Mercredi 16 Septembre 2015

INTERROGATION ÉCRITE N 1

EXERCICE 1 (5 points)
En 2010, un opérateur de téléphonie mobile avait un million de clients. Depuis, chaque année, l'opérateur perd 10% de ses clients, mais regagne dans le même temps 60 000 nouveaux clients.

1. (a) On donne l'algorithme ci-dessous. Expliquer ce que l'on obtient avec cet algorithme.

```
VARIABLES :     k, NbClients
TRAITEMENT :    Affecter à k la valeur 0
                Affecter à NbClients la valeur 1 000 000
                Tant que k < 8
                  | Affecter à k la valeur k + 1
                  | Affecter à NbClients la valeur 0,9 × NbClients + 60 000
                  | Afficher NbClients
                Fin Tant que
```

   (b) Recopier et compléter le tableau ci-dessous avec toutes les valeurs affichées pour k de 0 jusqu'à 5.

k	0	1	2	3	4	5
NbClients						

2. En supposant que cette évolution se poursuit de la même façon, la situation peut être modélisée par la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n, par :

$$\begin{cases} U_0 & = & 1\,000 \\ U_{n+1} & = & 0,9U_n + 60. \end{cases}$$

   Le terme U_n donne une estimation du nombre de clients, en millier, pour l'année $2010 + n$.
   Pour étudier la suite (U_n), on considère la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par $V_n = U_n - 600$.

   (a) Montrer que la suite (V_n) est géométrique de raison 0,9.

   (b) Déterminer l'expression de V_n en fonction de n.

   (c) Exprimer U_n en fonction de l'entier naturel n.

3. À la suite d'une campagne publicitaire conduite en 2013, l'opérateur de téléphonie observe une modification du comportement de ses clients.
   Chaque année à compter de l'année 2014, l'opérateur ne perd plus que 8 % de ses clients et regagne 100 000 nouveaux clients.
   On admet que le nombre de clients comptabilisés en 2014 était égal à 860 000.
   En supposant que cette nouvelle évolution se poursuive durant quelques années. Écrire un algorithme permettant de déterminer le nombre d'années nécessaire pour que l'opérateur retrouve au moins un million de clients.

EXERCICE 2 (5 points)
Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbf{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1.$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. On pourra en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.
2. (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$u_n \leqslant n+3.$$

   (b) Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n+3-u_n).$$

3. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbf{N}$ par $v_n = u_n - n$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.
   (b) En déduire que pour tout entier naturel n,

$$u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$$

4. Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$$

   Exprimer S_n en fonction de n.

EXERCICE 3 (5 points)
Étudier les limites en $+\infty$ de :
1. $f(x) = \dfrac{2x^3 - 4x^2 + 5x - \sqrt{2}}{x^4+1}$
2. $g(x) = x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
3. $h(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$
4. $i(x) = x^2 + 3x - \sqrt{x} + 4$
5. $j(x) = \sqrt{x^2+4x+3} - x + 2$.

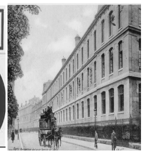
EXERCICE 4 (5 points)
partie A
On suppose que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ et que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell$.
Démontrer que $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell$

partie B
f est la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{3x+\cos x}{x-1}$.
Déterminer la limite de f en $+\infty$.

partie C
Einstein à montré que la masse m (en kg) d'un objet en mouvement est une fonction de la vitesse v (en m/s).
Si un solide à pour masse m_0 au repos, à la vitesse v, sa masse m est :
$m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$ où c est la vitesse de la lumière.
Déterminer la limite de m lorsque v tend vers c, avec $v < c$.

2 Devoir n 2 Octobre 2015 2 heures

Terminale 8
Mercredi 7 Octobre 2015



INTERROGATION ÉCRITE N 2

EXERCICE 1 (5 points)
Pour chacune des affirmations ci-dessous, précisez si elle est vraie ou fausse et **justifiez** ben votre réponse.

1. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.
2. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.
3. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
4. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
5. Si pour tout $x \geqslant 1, g(x) - f(x) \leqslant 0$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

EXERCICE 2 (5 points)
Soit f la fonction définie par $f(x) = -\dfrac{x^3}{3} + 2x^2 - 4x + 1$

1. Étudier la fonction f et donner sa courbe représentative dans un repère choisi.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α et une seule. Donner un encadrement à 10^{-3} près. (on expliquera la démarche).
3. Résoudre $f(x) > 0$.
4. Soit g la fonction définie par $g(x) = -\dfrac{x^4}{12} + \dfrac{2}{3}x^3 - 2x^2 + x + 1$. Étudier la fonction g.
5. On note $\mathscr{C}g$ la courbe représentative de g .Déterminer l'intersection de la tangente à la courbe $\mathscr{C}g$ au point d'abscisse 2 avec la droite d'équation $y = -2x + 5$.

EXERCICE 3 (5 points)
Partie A :
Démontrer que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0$.

Partie B :
f est la fonction définie sur $I = \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x) = 2\sin(x) + \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} - 3x$.

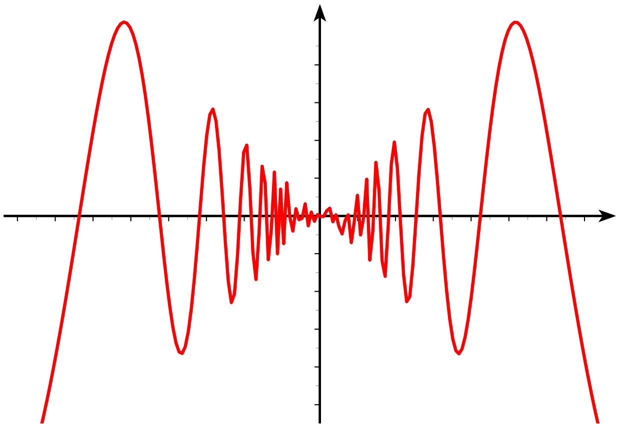
1. Justifiez que, sur l'intervalle I, le signe de $f'(x)$ est celui de $2\cos^3(x) - 3\cos^2(x) + 1$.
2. Soit P le polynôme défini sur $]0;1]$ par $P(X) = 2X^3 - 3X^2 + 1$.
   Étudiez le signe de $P(X)$ sur $]0;1]$.
3. En déduire le signe de $f'(x)$, puis les variations de f sur l'intervalle I.
4. Prouvez alors, que pour tout nombre x de I on a $2\sin(x) + \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} \geqslant 3x$.

EXERCICE 4 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = x\sin\dfrac{2}{x} \end{cases}$$

et voici sa représentation graphique $\mathcal{C}_f$ obtnue à l'écran d'une calculatrice.



1. (a) Conjecturer la limite de f en 0.

   (b) Proposer un affichage de la courbe $\mathcal{C}_f$ à l'écran de la calculatrice permettant de conjecturer la limite de f en $+\infty$.

2. On pose $h = \dfrac{2}{x}$.

   (a) Exprimer $f(h)$ en fonction de h. Déterminer $\lim\limits_{h\to 0} f(h)$.

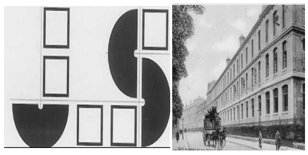
   (b) En déduire la limite de f en $+\infty$.

3. (a) Démontrer que, pour tout $x \neq 0$, on a $-x \leqslant f(x) \leqslant x$.

   (b) En déduire la limite de f en 0.

4. La fonction f est-elle continue en zéro ?

3 Devoir n 3 Novembre 2015 2 heures



Terminale 8
Mercredi 4 Novembre 2015

INTERROGATION ÉCRITE N 3

EXERCICE 1 (5 points)
Partie A :
Démontrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.
On pourra utiliser la fonction $h(x) = e^x - x$

Partie B :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

1. La fonction f est-elle paire ? est-elle impaire ? Quelle conséquence graphique cela entraine -t-il ?
2. Déterminer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.
3. Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.
4. Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(2x) = \dfrac{2f(x)}{[f(x)]^2 + 1}$.

EXERCICE 2 (5 points)
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x - x - 4$ et $\mathscr{C}$ sa courbe dans un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$.

1. Étudier les variations de f.
2. En remarquant que pour tout réel non nul x : $f(x) = x\left(\dfrac{e^x}{x} - 1 - \dfrac{4}{x}\right)$, déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Soit la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -x - 4$. Préciser la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}$ lorsque x tend vars $-\infty$..
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions α et β qu'on encadrera par des entiers consécutifs.
5. Représenter la courbe $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormal.

EXERCICE 3 (5 points)
Le nombre d'arbres d'une forêt, en milliers d'unités, est modélisé par la suite (u_n) où u_n désigne le nombre d'arbres, en milliers, au cours de l'année $(2010 + n)$. En 2010, la forêt possède 50000 arbres. Afin d'entretenir cette forêt vieillissante, un organisme régional d'entretien des forêts décide d'abattre chaque année 5 % des arbres existants et de replanter 3000 arbres.

1. Montrer que la situation peut être modélisée par :

$$u_0 = 50 \text{ et pour tout entier naturel } n \text{ par la relation : } u_{n+1} = 0,95u_n + 3.$$

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = 60 - u_n$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,95$.

   (b) Calculer v_0. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n.
   (c) Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = 60 - 10 \times (0,95)^n$.
3. Déterminer le nombre d'arbres de la forêt en 2015. On donnera une valeur approchée arrondie à l'unité.
4. Démontrer que $u_{n+1} - u_n > 0$.
5. Écrire un algorithme permettant de déterminer l'année à partir de laquelle le nombre d'arbres de la forêt aura dépassé de 10 % le nombre d'arbres de la forêt en 2010. imite de la suite (u_n).

EXERCICE 4 (5 points)
Partie A :
Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4x^3 - 3x - 8$.

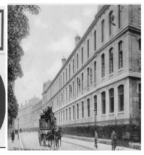
1. Donner le tableau de variations de g.
2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α. Donner un encadrement de α à 10^{-3} près.
3. Déterminer le signe de $g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Partie B :
Soit a fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$ par $f(x) = \dfrac{x^3+1}{4x^2-1}$.

1. Démontrer que, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$, on a $f'(x) = \dfrac{xg(x)}{(4x^2-1)^2}$.
2. Dresser, en justifiant, le tableau de variations de f. (On ne demande pas de calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.)
3. Démontrer que $f(\alpha) = \dfrac{3\alpha}{8}$.

4 Devoir n 4 Novembre 2015 2 heures

Terminale 8
Mercredi 25 Novembre 2015



INTERROGATION ÉCRITE N 4

EXERCICE 1 (5 points)
Toute réponse sans explication sera considérée comme fausse.

1. Résoudre : $\ln(5x-6)-2\ln x=0$
2. Résoudre : $(\ln x)^2+\frac{1}{2}\ln(x^2)-6=0$
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)+2+3e^{-x}\right)$
4. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\ln x}$
5. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x-x^2+3}{2x}$

EXERCICE 2 (5 points)
On considère la fonction f définie sur $]-1;+\infty[$ par :

$$f(x)=x-\ln(1+x)$$

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative dans un repère.
3. Déterminer le signe de f sur $]-1;+\infty[$.
4. (a) En utilisant le signe de f, justifier que pour tout entier naturel n, on a $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$.

   (b) En déduire que pour tout entier n non nul : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e$

EXERCICE 3 (5 points)
On considère la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1}=\sqrt{2u_n}.$$

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel positif
Initialisation :	Demander la valeur de n
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Pour i variant de 1 à n :
	| Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

   (a) Donner une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat qu'affiche cet algorithme lorsque l'on choisit $n=3$.

   (b) Que permet de calculer cet algorithme ?

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leqslant 2$.
3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln u_n - \ln 2$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -\ln 2$.
   (b) Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.
   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n).
   (d) Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions du traitement et de la sortie, de façon à afficher en sortie la plus petite valeur de n telle que $u_n > 1{,}999$.

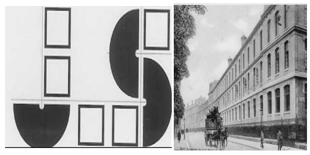
Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	
Sortie :	

EXERCICE 4 (5 points)
Partie A :
Résoudre l'inéquation : $\ln(3x^2 - x - 2) \leq \ln(9x+6)$.

Partie B :
On pose : $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Justifier que f est dérivable sur cet ensemble, déterminer $f'(x)$ et donner le tableau de variations de f.
3. Démontrer que f est une fonction impaire. Interprétation graphique.
4. Tracer la courbe représentative de f.

5 Devoir n 5 Décembre 2015 2 heures



Terminale 8
Mercredi 16 Décembre 2015

INTERROGATION ÉCRITE N 5

EXERCICE 1 (6 points)

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :$(1-i)z+2i-2\sqrt{3}=-2(1+i\sqrt{3})$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z^2+z+1)(z^2+1)=0$
3. Soit $z'=\dfrac{z-2-i}{z+i}$ avec $z\neq i$. On note $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$ avec x, y, x', y' réels.
   Exprimer x' et y' en fonction de x et y.
4. Pour $z\neq 0$, on pose $Z=z+\dfrac{1}{z}$. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que $Z\in\mathbb{R}$.

EXERCICE 2 (7 points)
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x)=\ln x-\frac{1}{\ln x}.$$

On nomme $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f et Γ la courbe d'équation $y=\ln x$ dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\ ;\vec{i},\ \vec{j}\right)$.

1. Étudier les variations de la fonction f et préciser les limites en 1 et en $+\infty$.
2. (a) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\ln x]$.
   Interpréter graphiquement cette limite.
   (b) Préciser les positions relatives de $(\mathscr{C})$ et de Γ.
3. On se propose de chercher les tangentes à la courbe $(\mathscr{C})$ passant par le point O.
   (a) Soit a un réel appartenant à l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$.
   Démontrer que la tangente $\mathscr{T}_a$ à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse a passe par l'origine du repère si et seulement si $f(a)-af'(a)=0$.
   Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ par
   $$g(x)=f(x)-xf'(x).$$
   (b) Montrer que sur $]1\ ;\ +\infty[$, les équations $g(x)=0$ et $(\ln x)^3-(\ln x)^2-\ln x-1=0$ ont les mêmes solutions.
   (c) Après avoir étudié les variations de la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(t)=t^3-t^2-t-1$ montrer que la fonction u s'annule une fois et une seule sur $\mathbb{R}$.
   (d) En déduire l'existence d'une tangente unique à la courbe $(\mathscr{C})$ passant par le point O.
   La courbe $(\mathscr{C})$ et la courbe Γ sont données en annexe.
   Tracer cette tangente le plus précisément possible sur cette figure.
4. On considère un réel m et l'équation $f(x)=mx$ d'inconnue x.
   Par lecture graphique et sans justification, donner, suivant les valeurs du réel m, le nombre de solutions de cette équation appartenant à l'intervalle $]1\ ;10]$.

EXERCICE 3 (7 points)

I. Première partie

On appelle f et g les deux fonctions définies sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \ln(1+x) - x \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}.$$

1. Étudier les variations de f et de g sur $[0\ ;\ +\infty[$.
2. En déduire que pour tout $x \geqslant 0$, $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

II. Deuxième partie

On se propose d'étudier la suite (u_n) de nombres réels définie par :

$$u_1 = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

1. Montrer par récurrence que $u_n > 0$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

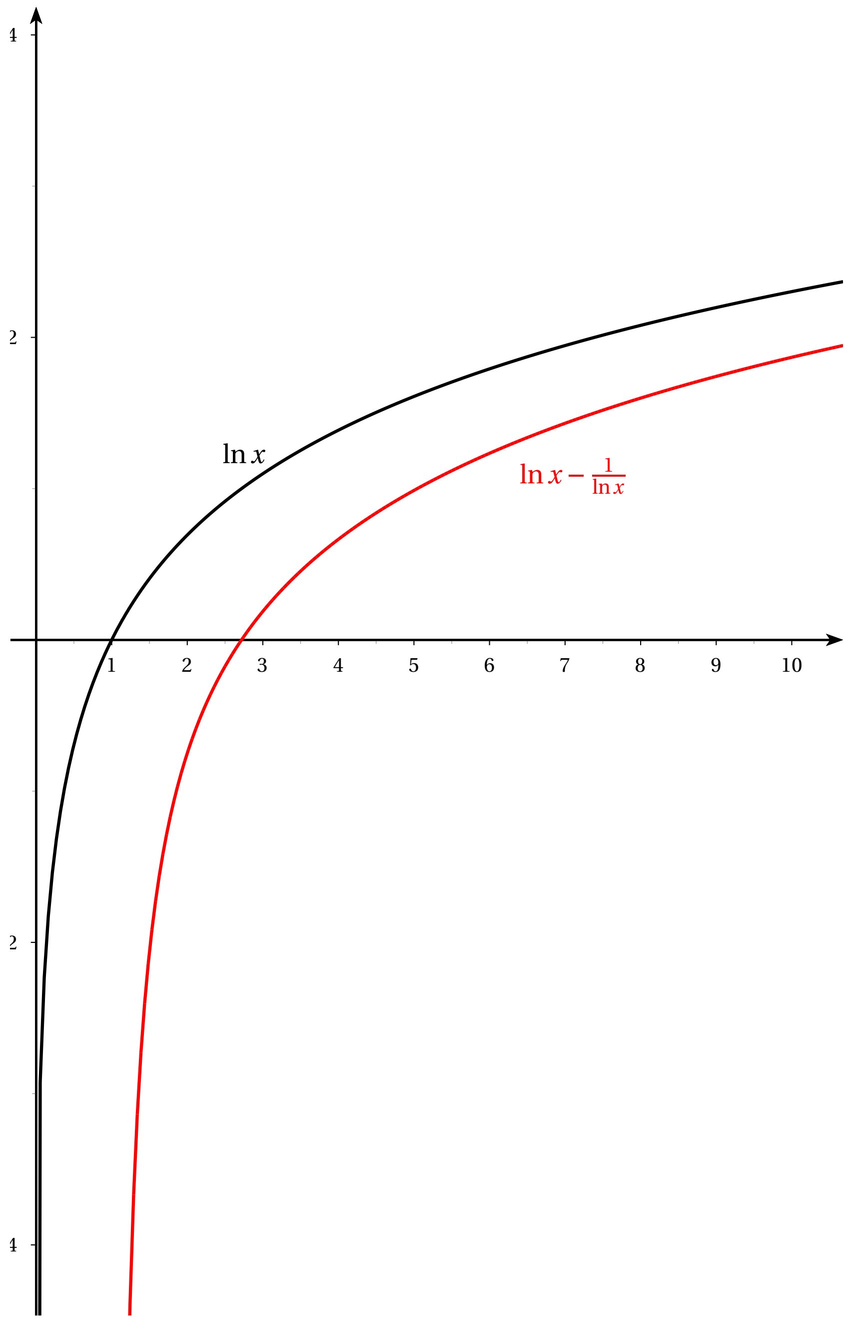
$$\ln u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right).$$

3. On pose $S_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \cdots + \dfrac{1}{2^n}$ et $T_n = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4^2} + \dfrac{1}{4^3} + \cdots + \dfrac{1}{4^n}$.
   À l'aide de la première partie, montrer que :

$$S_n - \frac{1}{2}T_n \leqslant \ln u_n \leqslant S_n.$$

4. Calculer S_n et T_n en fonction de n. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} T_n$.
5. Étude de la convergence de la suite (u_n).
   (a) Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.
   (b) En déduire que (u_n) est convergente. Soit ℓ sa limite.
   (c) On admet le résultat suivant : si deux suites (v_n) et (w_n) sont convergentes et telles que $v_n \leqslant w_n$ pour tout n entier naturel, alors
   $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} w_n$.
   Montrer alors que $\dfrac{5}{6} \leqslant \ln \ell \leqslant 1$ et en déduire, un encadrement de ℓ.

Représentations graphiques Exercice 2



6 Devoir n 6 Janvier 2016 3 heures

Terminale 8
Mercredi 20 Janvier 2016

INTERROGATION ÉCRITE N 6

EXERCICE 1 (5 points)
Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1;+\infty[$ par : $f(x) = x^2 + x + 1 - \ln x$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan.

1. Étudier la limite de f en $+\infty$.
2. Démontrer que f est croissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$.
3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

Partie B

Soit g la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par $g(x) = f(x) - (2x+1)$.

1. Étudier le sens de variation de g sur l'intervalle $[1;+\infty[$.
2. Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$ pour $x \in [1;+\infty[$.
3. Déduire de ce qui précède la position de $\mathscr{C}$ par rapport à T.

Partie C

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1$.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.
4. En déduire la limite de (u_n).

EXERCICE 2 (5 points)

Pré-requis :

1. Pour tout réel $\theta; \mathrm{e}^i\theta = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$
2. Pour tout réel θ et tout entier naturel $n; \left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{in\theta}$.
3. Pour tous réels θ et θ' on a : $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{i\theta}} = \mathrm{e}^{-i\theta}$; $\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{e}^{i\theta'} = \mathrm{e}^{i(\theta+\theta')}$; $\dfrac{\mathrm{e}^{i\theta}}{\mathrm{e}^{i\theta'}} = \mathrm{e}^{i(\theta-\theta'}$.

Questions :

1. Démontrer que pour tout réel θ, $\cos\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}$.
2. En déduire que pour tout réel θ, $(-2i\sin\theta)\,\mathrm{e}^{i\theta} = 1 - \mathrm{e}^{i2\theta}$.
3. Soit x un réel tel que $x \neq 0 + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.
   Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $S_n = 1 + \mathrm{e}^{i2x} + \cdots + \mathrm{e}^{i2nx}$.
   Justifier que pour tout entier naturel n non nul : $S_n = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{i2(n+1)x}}{1 - \mathrm{e}^{i2x}}$.
4. En déduire que pour tout entier naturel n non nul : $S_n = \dfrac{\sin(n+1)x}{\sin x}\mathrm{e}^{inx}$.

5. En déduire une expression simple de $S_n^{'} = 1 + \cos 2x + \cdots + \cos 2nx$.

EXERCICE 3 (5 points)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra pour le dessin : $\left\|\vec{u}\right\| = 2$ cm.
M est un point d'affixe z non nulle. On désigne par M' le point d'affixe z' telle que

$$z' = -\frac{2}{\overline{z}}.$$

où $\overline{z}$ désigne le conjugué du nombre complexe z.

A - Quelques propriétés

1. Soit z un nombre complexe non nul. Déterminer une relation entre les modules de z et z' puis une relation entre les arguments de z et z'.
2. Démontrer que les points O, M et M' sont alignés.
3. Démontrer que pour tout nombre complexe z non nul on a l'égalité :

$$\overline{z' + 2} = \frac{2}{z}(z - 1).$$

B - Construction de l'image d'un point

On désigne par A et B les deux points d'affixes respectives 1 et -2.
On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie : $|z - 1| = 1$.

1. Quelle est la nature de l'ensemble $\mathscr{C}$?
2. Soit M un point de $\mathscr{C}$ d'affixe z, distinct du point O.
   (a) Démontrer que $\left|z' + 2\right| = \left|z'\right|$. Interpréter géométriquement cette égalité.
   (b) Est-il vrai que si z' vérifie l'égalité : $\left|z' + 2\right| = \left|z'\right|$, alors z vérifie l'égalité : $|z - 1| = 1$?
3. Tracer l'ensemble $\mathscr{C}$ sur une figure. Si M est un point de $\mathscr{C}$, décrire et réaliser la construction du point M'.

EXERCICE 4 (5 points)

Partie A :

Soit A, B, C, D, E les points du plan complexe d'affixes respectives :
$z_A = 1$; $z_B = -2 - i$; $z_C = -2i$; $z_D = i\sqrt{2}$; $z_E = 4 - 3i\sqrt{2}$.

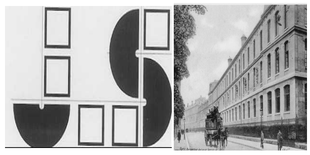
1. Faire une figure et placer les 5 points.
2. (a) Déterminer un argument de $\dfrac{z_C - z_B}{z_C - z_A}$.
   (b) En déduire la nature du triangle ABC.
3. Démontrer que les points A, D et E sont alignés.

Partie B :

À tout nombre complexe z tel que $z \neq -2$, on associe le nombre complexe $Z = \dfrac{z - 3i}{z + 2}$.
Déterminer, dans chacun des cas suivants, l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z tels que Z vérifie la condition donnée.

1. Z est réel.
2. Z est imaginaire pur.
3. $|\,Z\,| = 1$.

7 Devoir n 7 Février 2016 3 heures



Terminale 8
Mercredi 10 Février 2016

INTERROGATION ÉCRITE N 7

EXERCICE 1 (5 points)
PARTIE A :
On suppose que deux événements A et B de probabilités non nulles sont indépendants pour la probabilité P .
Démontrer alors il en est de même pour les événements $\overline{A}$ et B.

PARTIE B :
Soit A et B deux évènements liés à une expérience aléatoire. Les probabilités des évènements A, B et A ∩ B sont données par les égalités

$$P(\mathrm{A}) = \frac{5}{3} \qquad P(\mathrm{B}) = \frac{3}{4} \qquad P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{2}{5}.$$

1. L'une des données ci-dessus est aberrante, laquelle ? pourquoi ?
2. Modifier cette donnée de façon que les évènements A et B soient indépendants.
3. En conservant cette nouvelle donnée, déterminer la valeur de $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$.

PARTIE C :
Une urne U_1 contient 3 boules rouges et 2 boules vertes.
Une urne U_2 contient 2 boules rouges et 1 boule verte.
1^{re} étape : on prend au hasard une boule de U_1 et n la met dans U_2.
2^{e} étape : on prend au hasard une boule de U_2.
Déterminer la probabilité que la boule soit verte.

EXERCICE 2 (5 points)
Soient A et B les points d'affixes respectives $z-A = 2-i$ et $z-B = -2i$ dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal$(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Soit M le point d'affixe z.
On appelle f l'application, qui, a tout nombre complexe z différent de $-2i$, associe :
$Z = f(z) = \dfrac{z-2+i}{z+2i}$

1. En notant $z = x + iy$, x et y étant deux réels.
   (a) Exprimer la partie réelle(notée X) et la partie imaginaire (notée Y) de Z en fonction de x et y. En déduire la nature de :
   (b) L'ensemble $\mathscr{E}_1$ des points M d'affixe z, tels que Z soit un réel.
   (c) L'ensemble $\mathscr{E}_2$ des points M d'affixe z, tels que Z soit un imaginaire pur éventuellement nul.
   (d) Représenter ces deux ensembles.
2. Interpréter géométriquement l'argument de Z à l'aide des points A, B et M. Retrouver alors les ensembles $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$ par une méthode géométrique.
3. Calculer $|f(z)-1| \times |z+2i|$. En déduire que les points M' d'affixe Z, lorsque le point M d'affixe z parcourt le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{5}$, sont tous sur un même cercle dont on précisera le rayon et l'affixe du centre.

EXERCICE 3 (5 points)

Dans un stade, l'unique activité d'un enfant est de jouer au tennis ou au pingpong.
On a observé que si un enfant joue au tennis, la probabilité qu'il y rejoue est $0,4$.
Si un enfant choisit le pingpong, la probabilité qu'il y rejoue est $0,7$.
Lors du premier jeu les deux activités ont la même probabilité d'être choisies.
Pour tout entier naturel n non nul, on considère l'évènement :

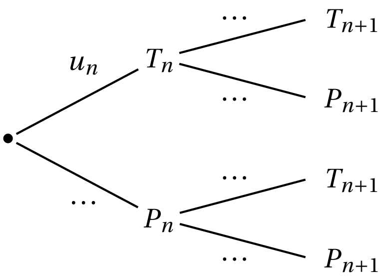
- T_n : « l'enfant choisit le tennis lors de son n-ième jeu. »
- P_n : « l'enfant choisit le pingpong lors de son n-ième jeu. »

On considère alors la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

$$u_n = p(T_n)$$

où $p(T_n)$ est la probabilité de l'évènement T_n.

1. (a) Donner les valeurs des probabilités $p(T_1)$, $p(P_1)$ et des probabilités conditionnelles $p_{T_1}(T_2)$, $p_{P_1}(T_2)$.
   (b) Montrer que $p(T_2) = 0,35$.
   (c) Recopier et compléter l'arbre suivant :



   (d) Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = 0,1u_n + 0,3$.
   (e) À l'aide de la calculatrice, émettre une conjecture concernant la limite de la suite (u_n).
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

$$v_n = u_n - \frac{3}{9}.$$

   (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{10}$. Préciser son premier terme.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
   (c) Calculer la limite de la suite (u_n). Ce résultat permet-il de valider la conjecture émise en 1. e. ?

EXERCICE 4 (5 points)

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_1 & = & \frac{1}{2} \\ u_{n+1} & = & \frac{n+1}{2n}u_n \end{array}\right.$$

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.
2. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n est strictement positif.
   (b) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
   (c) Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

3. Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$v_n = \frac{u_n}{n}.$$

   (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme v_1.

   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul,

$$u_n = \frac{n}{2^n}.$$

4. Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \ln x - x \ln 2$.

   (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   (b) En déduire la limite de la suite (u_n).

8 Devoir n 8 Mars 2016 3 heures

Baccalauréat blanc 2015-2016
Lycée Janson de Sailly
Epreuve de Mathématiques Série S
durée : 4 heures

L'usage de la calculatrice est autorisé

Le numéro de la classe devra figurer dans la partie anonymée.

Indiquez en tête de la copie si vous avez ou non suivi l'enseignement de spécialité mathématiques.

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité, l'annexe est à remettre avec la copie.

Faire figurer sur la feuille annexe et sur la feuille de papier millimétré seulement vos initiales.

La feuille annexe et la feuille de papier millimétré devront être numérotées comme les autres feuilles.

Exercice 1 (4 *points*)

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = 1$. On justifiera la réponse.
2. Soit le point A d'affixe 1, le point B d'affixe i, le point C d'affixe -1 et le point D d'affixe $-i$.
   On appelle f l'application qui à tout point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe $z' = ze^{i\frac{\pi}{3}}$.
   (a) Donner la forme algébrique du nombre complexe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
   (b) On note A', B', C', D' les images respectives des points A, B, C, D par cette application.
   Donner l'affixe des points $A'; B'; C'$ et D' sous forme algébrique.
3. Dans le repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$d'unité graphique 4 cm, indiquer comment placer le point A' de façon exacte.
   Placer les points $A'; B'; C'$ et D'
4. Déterminer la nature du quadrilatère $A'B'C'D'$.
5. Déterminer et construire $\mathscr{E}_1$, ensemble des points M d'affixe z tel que $\mid z-1 \mid = \mid z-i \mid$ et $\mathscr{E}_2$, ensemble des points M d'affixe z tel que $\mid z - z_{A'} \mid = \dfrac{1}{4}$, où $z_{A'}$ désigne l'affixe de A'.

Exercice 2 (6 *points*)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x+\mathrm{e}^{-x}$. Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Exprimer $f'(x)$ et établir le tableau de variation de f.
3. Étudier la la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite d'équation $y = x$.
4. Tracer dans le même repère $(\mathscr{C})$ et la droite (D) d'équation $y = x$.

Partie B

1. Écrire l'équation de la tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse $x_0 = -1$, et tracer cette tangente.
2. On considère une droite (D_m) d'équation $y = mx$, où m est un paramètre réel.
   (a) Tracer, pour les deux valeurs de m égales à -3, puis à -1, les deux droites (D_m).
   (b) Préciser dans chaque cas le nombre de points d'intersection de cette droite avec la courbe $(\mathscr{C})$, en justifiant avec précision les réponses données.
   (c) Conjecturer suivant les valeurs de m le nombre de points d'intersection de (D_m) avec la courbe $(\mathscr{C})$.

Exercice 3 (5 *points*)

1. On considère la fonction f définie sur $]-2\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{5x-2}{x+2}$.
   On donne en annexe la représentation graphique $\mathscr{C}$ de f dans un repère du plan.
   (a) Étudier les variations de f sur l'intervalle $]-2\,;+\infty[$.
   (b) Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à la droite Δ d'équation $y=x$.
2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0=\dfrac{3}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f(u_n)$.
   (a) Représenter sur le graphique donné en annexe, sans les calculer, les cinq premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses.
   (b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $1<u_n<u_{n+1}<2$.
   (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
3. On admet que la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation $\dfrac{5x-2}{x+2}=x$.
   Déterminer cette limite.
4. Étant donné un réel r strictement positif, on souhaite déterminer, à l'aide d'un algorithme, la plus petite valeur de l'entier naturel n tel que $u_n>2-r$.
   Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter de façon à afficher la valeur cherchée de l'entier n.

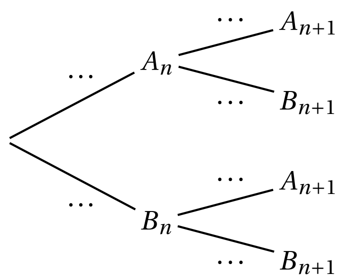
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à u la valeur $\dfrac{3}{2}$
Entrée :	Demander la valeur de r
Traitement :	
Sortie :	

Exercice 4 (5 *points*)
Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

Alice joue à un jeu de fléchettes. Elle effectue des lancers successifs d'une fléchette. On suppose qu'au premier lancer elle a autant de chance de rater que d'atteindre la cible.
Lorsqu'elle a atteint sa cible lors d'un lancer, la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivant est $\frac{1}{2}$.
Lorsqu'elle a raté sa cible lors d'un lancer, la probabilité qu'elle rate la cible au lancer suivant est $\frac{3}{4}$.
Pour tout entier strictement positif n, on considère les évènements suivants :
A_n : « Alice atteint la cible au n-ième lancer » ;
B_n : « Alice rate la cible au n-ième lancer » ;
et on désigne par p_n la probabilité de l'événement A_n.
Enfin, les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. Déterminer p_2.
2. Alice a atteint la cible au deuxième lancer, quelle est la probabilité qu'elle l'ait atteinte au premier lancer.
3. Soit n un entier strictement positif.
   (a) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



   (b) Démontrer qu'on a : $p_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{4}$.
4. On pose, pour tout entier strictement positif n : $u_n = p_n - \frac{1}{3}$.
   (a) Montrer que la suite (u_n) ainsi définie est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme u_1.
   (b) Exprimer alors u_n puis p_n en fonction de l'entier strictement positif n.
   (c) Déterminer alors la limite éventuelle de la suite (p_n). Conclure.

Partie B
On suppose maintenant que les lancers successifs sont indépendants et qu'à chaque lancer, la probabilité qu'Alice atteigne la cible est $\frac{1}{3}$.
n étant un entier strictement positif, on note X la varibale aléatoire égale au nombre de fois où Alice atteint la cible au cours de n lancers consécutifs.

1. Déterminer la loi de probabilité de X. Justifier.
2. Déterminer le nombre minimum de lancers nécessaires pour que la probabilité qu'Alice atteigne la cible au moins une fois au cours de n lancers consécutifs soit supérieure ou égale à $0,999$.

Exercice 4 (5 *points*)
Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les deux parties sont indépendantes

Partie A

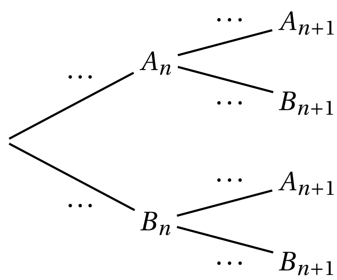
Alice joue à un jeu de fléchettes. Elle effectue des lancers successifs d'une fléchette. On suppose qu'au premier lancer elle a autant de chance de rater que d'atteindre la cible.
Lorsqu'elle a atteint sa cible lors d'un lancer, la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivant est $\frac{1}{2}$.
Lorsqu'elle a raté sa cible lors d'un lancer, la probabilité qu'elle rate la cible au lancer suivant est $\frac{3}{4}$.
Pour tout entier strictement positif n, on considère les évènements suivants :

A_n : « Alice atteint la cible au n-ième lancer » ;

B_n : « Alice rate la cible au n-ième lancer » ;

et on désigne par p_n la probabilité de l'événement A_n et q_n la probabilité de l'événement B_n.
Soit A la matrice $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n non nul, soit $V_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



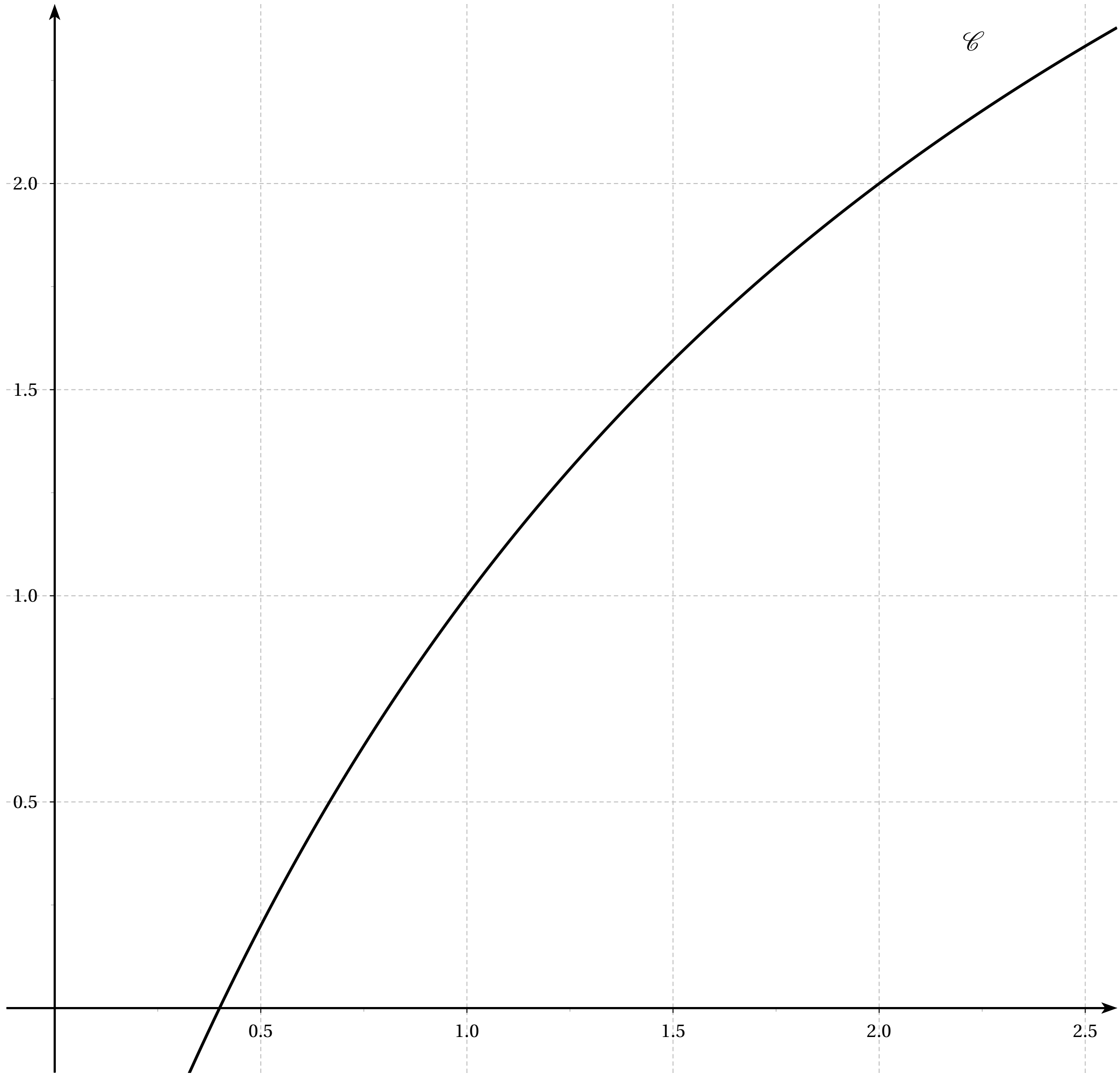
2. Vérifier que $V_{n+1} = AV_n$ pour tout n non nul.
   Démontrer par récurrence que $V_n = A^{n-1}V_1$ pour tout n naturel non nul.
3. On admet que pour tout n naturel non nul, $A^n = \frac{1}{4^n}\begin{pmatrix} \frac{4^n}{3}+\frac{2}{3} & \frac{4^n}{3}-\frac{1}{3} \\ 2\times\frac{4^n}{3}-\frac{2}{3} & 2\times\frac{4^n}{3}+\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

   En déduire p_n en fonction de n.
4. Quelle est la limite de (p_n) ?

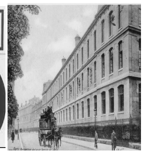
Partie B

1. Donner la décomposition en facteurs premiers de 2016.
2. Combien 2016 a-t-il de diviseurs positifs ?
3. Déterminer les entiers naturels x et y premiers entre eux tels que $xy = 2016$.
4. Soit n un entier naturel possédant exactement trois diviseurs premiers p, q et r distincts.
   Quelles sont les décompositions en produit de facteurs premiers possibles de n sachant que n possède exactement 36 diviseurs positifs ?

Annexe Exercice 3



9 Devoir n 9 Avril 2016 3 heures



Terminale 8
Mercredi 6 Avril 2016

INTERROGATION ÉCRITE N 8
EXERCICE 1 (5 points)
Partie A :
On considère les intégrales : $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}dx$ et $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$.
Calculer J puis $I+J$ et en déduire I.

Partie B :
On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0\,;16]$ par

$$f(x) = \ln(x+1) \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(x+1) + 1 - \cos(x).$$

Dans un repère du plan $\left(\text{O}\,;\vec{i},\ \vec{j}\right)$, on note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g.
Ces courbes sont données en **annexe 1**.
Comparer les aires des deux surfaces hachurées sur ce graphique.

EXERCICE 2 (5 points)
On considère les nombres complexes z_n définis, pour tout entier naturel n, par

$$z_0 = 1 \quad \text{et} \quad z_{n+1} = \left(1 + \text{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)z_n.$$

On note A_n le point d'affixe z_n dans le repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ de l'annexe 2.
L'objet de cet exercice est d'étudier la construction des points A_n.

1. (a) Vérifier que $1 + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}}$.
   (b) En déduire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.
2. (a) Montrer que pour tout entier naturel n,

$$z_n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \text{e}^{\text{i}n\frac{\pi}{6}}.$$

   (b) Pour quelles valeurs de n, les points O, A_0 et A_n sont-ils alignés ?
3. Pour tout entier naturel n, on pose $d_n = |z_{n+1} - z_n|$.
   (a) Interpréter géométriquement d_n.
   (b) Calculer d_0.
   (c) Montrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$z_{n+2} - z_{n+1} = \left(1 + \text{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(z_{n+1} - z_n).$$

   (d) En déduire que la suite $(d_n)_{n\geqslant 0}$ est géométrique puis que pour tout entier naturel n,

$$d_n = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n.$$

4. (a) Montrer que pour tout entier naturel n,

$$|z_{n+1}|^2 = |z_n|^2 + d_n^2.$$

   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n, le triangle $\mathrm{O}A_nA_{n+1}$ est rectangle en A_n.

   (c) Construire, à la règle non graduée et au compas, le point A_5 sur la figure de **l'annexe 2** à rendre avec la copie.

   (d) Justifier cette construction.

EXERCICE 3 (5 points)

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.
On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x - y + 3z + 1 = 0$
et la droite $\mathscr{D}$ dont une représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = -5 + 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

On donne les points $A(1\ ;\ 1;\ 0)$, $B(3\ ;0\ ;\ -1)$ et $C(7\ ;1\ ;\ -2)$

Proposition 1 :

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est $\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = -2 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$

Proposition 2 :
Les droites $\mathscr{D}$ et (AB) sont orthogonales.

Proposition 3 :
Les droites $\mathscr{D}$ et (AB) sont coplanaires.

Proposition 4 :
La droite $\mathscr{D}$ coupe le plan $\mathscr{P}$ au point E de coordonnées $(8;\ -3;\ -4)$.

Proposition 5 :
Les plans $\mathscr{P}$ et (ABC) sont parallèles.

EXERCICE 4 (5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^x + 2\right)$.
La courbe $(\mathscr{C})$ représentative de la fonction f dans un repère orthogonal est donnée en annexe.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A - Étude de la fonction f.

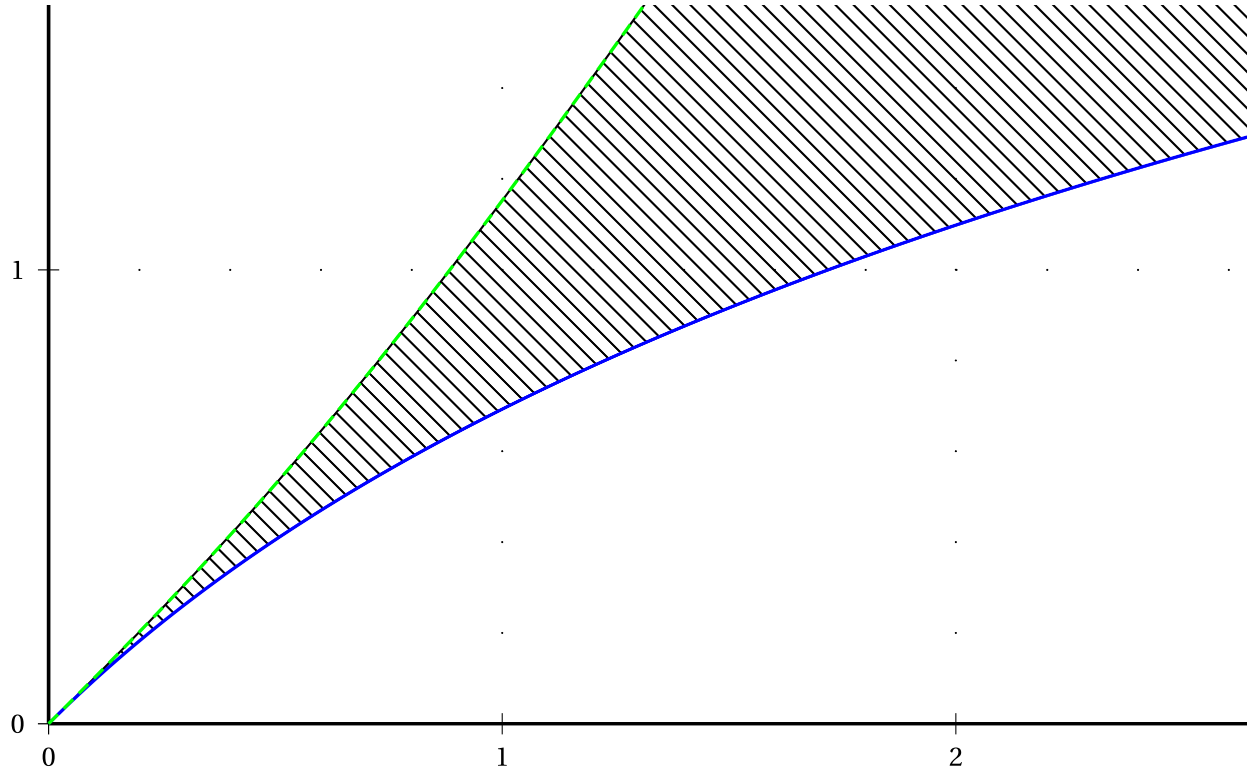
1. Étudier la limite de f en $-\infty$ et interpréter graphiquement cette limite.
2. Étudier la limite de f en $+\infty$.
3. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

Partie B - Encadrement d'une intégrale.

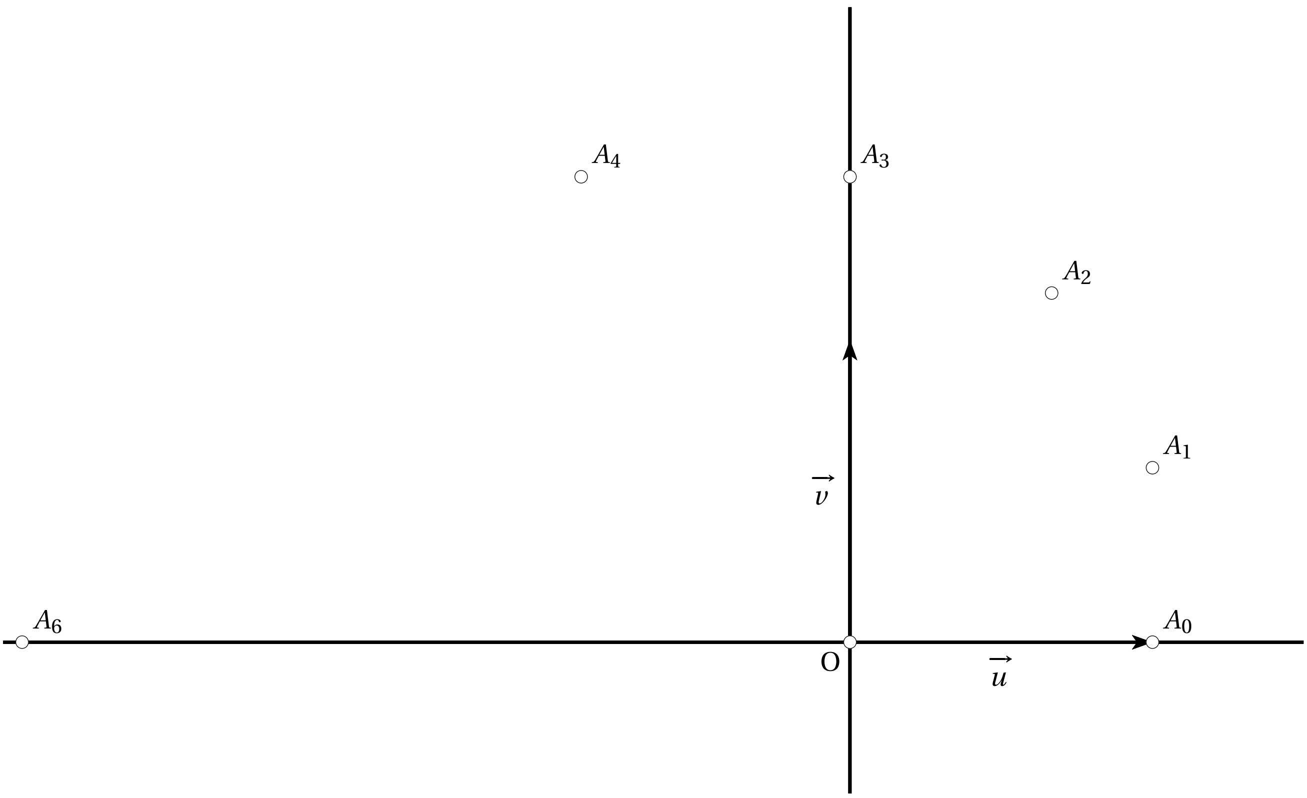
On pose $I = \displaystyle\int_2^3 [f(x) - x]\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = x + \ln(1 + 2e^{-x})$.
   Étudier la position relative de $(\mathscr{C})$ et de la droite (d) d'équation $y = x$.
   Tracer la droite (d) sur la feuille annexe
2. On pose $I = \displaystyle\int_2^3 [f(x) - x]\,dx$.
   (a) Donner une interprétation géométrique de I.
   (b) Montrer que, pour tout $X \in [0\,;\,+\infty[$, $\ln(1 + X) \leqslant X$.
   En déduire que, pour tout x réel, $\ln(1 + 2e^{-x}) \leqslant 2e^{-x}$.
   (c) Démontrer que $0 \leqslant I \leqslant \displaystyle\int_2^3 2e^{-x}\,dx$.
   (d) Donner la valeur exacte de $\displaystyle\int_2^3 2e^{-x}\,dx$ et en déduire un encadrement de I d'amplitude 0,2.

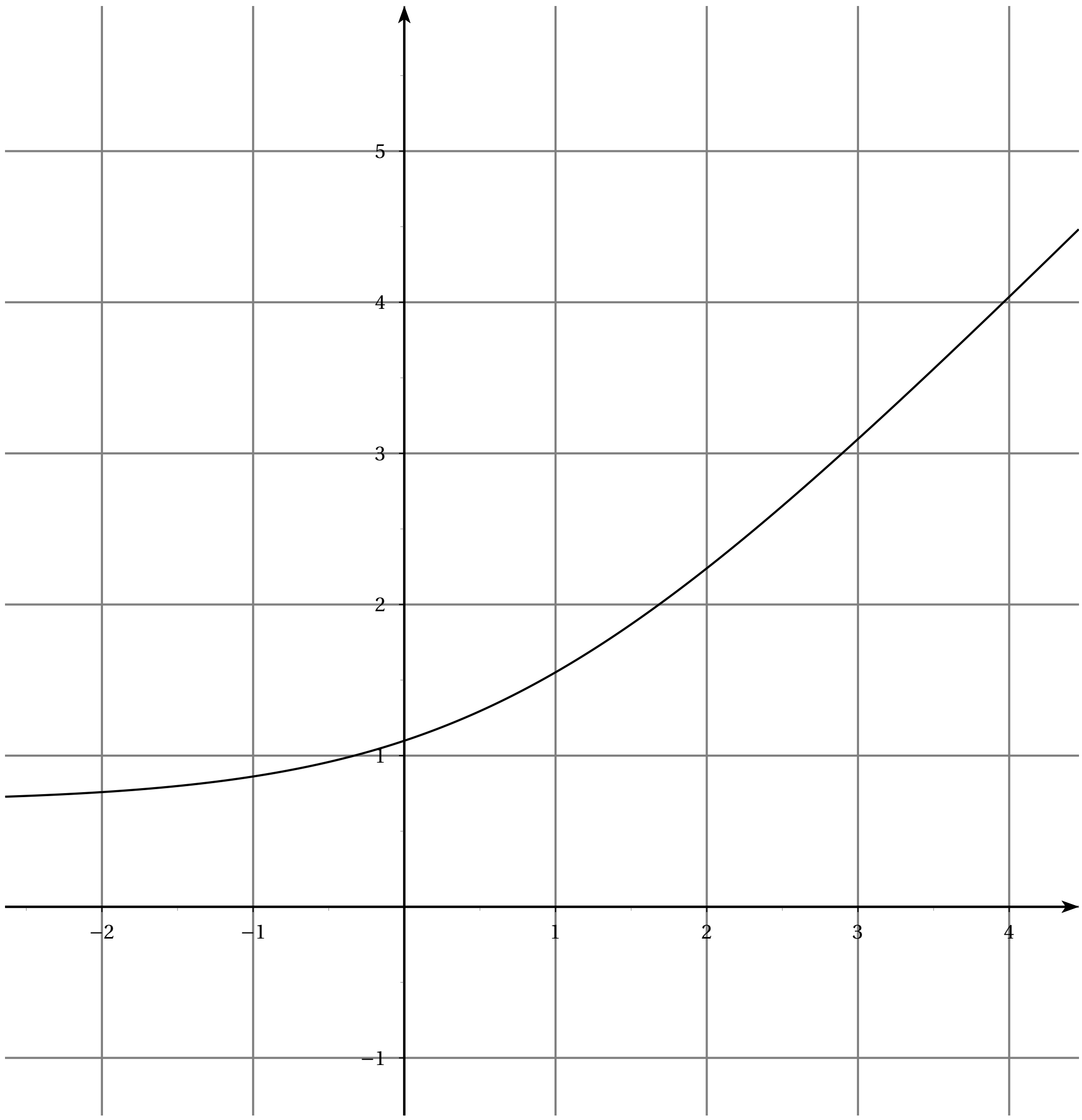
ANNEXE 1 de l'exercice 1



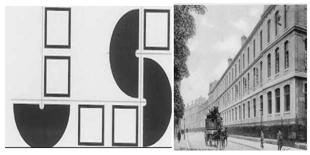
ANNEXE 2 de l'exercice 2



Annexe de l'exercice 4

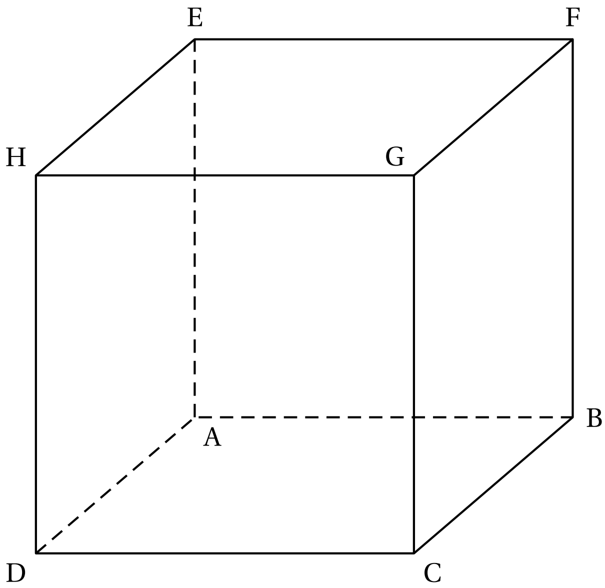


10 Devoir n 10 Mai 2016 3 heures



Terminale 8
Mercredi 18 Mai 2016

INTERROGATION ÉCRITE N 10
EXERCICE 1 (5 points)
Soit ABCDEFGH le cube ci-dessous.



On se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AD}\,,\overrightarrow{AE}\right)$.

1. (a) Montrer que la droite (DB) admet pour représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& s\\ y &=& 1-s, \\ z &=& 0\end{array}\right. \text{, où s décrit l'ensemble } \mathbb{R} \text{ des nombres réels.}$$

   (b) Montrer que les points de la droite (AG) sont les points de coordonnées $(t\,;\,t\,;\,t)$ où t est un réel.

2. Soit M un point quelconque de la droite (DB) et N un point quelconque de la droite (AG).
   Démontrer que la droite (MN) est perpendiculaire aux deux droites (AG) et (DB) si et seulement si M et N ont pour coordonnées respectives $\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,0\right)$ et $\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right)$.

3. Soit s et t deux réels quelconques. On note $M(s\,;\,1-s\,;\,0)$ un point de la droite (DB) et $N(t\,;\,t\,;\,t)$ un point de la droite (AG).
   (a) Montrer que $MN^2 = 3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(s-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}$.
   (b) En déduire la position des points M et N pour laquelle la distance MN est minimale.
   Que peut-on dire de la droite (MN) dans ce cas ?

EXERCICE 2 (6 points)
Soit n un entier naturel non nul.
On considère la fonction f_n définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f_n(x) = x^2 e^{-2nx}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthogonal.

On définit, pour tout entier naturel n non nul, $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie A : Étude de la fonction f_1

1. La fonction f_1 est définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = x^2\mathrm{e}^{-2x}$.
   On admet que f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f_1' sa dérivée.
   (a) Justifier que pour tout réel x, $f_1'(x) = 2x\mathrm{e}^{-2x}(1-x)$.
   (b) Étudier les variations de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.
   (c) Déterminer la limite de f_1 en $-\infty$.
   (d) Vérifier que pour tout réel x, $f_1(x) = \left(\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\right)^2$. En déduire la limite de f_1 en $+\infty$.
2. En utilisant un système de calcul formel, on trouve qu'une primitive F_1 de la fonction f_1 est donnée par $F_1(x) = -\mathrm{e}^{-2x}\left(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}\right)$.
   En déduire la valeur exacte de I_1.

Partie B : Étude de la suite (I_n)

1. Soit n un entier naturel non nul.
   (a) Interpréter graphiquement la quantité I_n.
   (b) Émettre alors une conjecture sur le sens de variation et sur la limite éventuelle de la suite (I_n). Expliciter la démarche qui a mené à cette conjecture.
2. (a) Justifier que, pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à $[0 ; 1]$,
   $$f_{n+1}(x) = \mathrm{e}^{-2x} f_n(x).$$
   (b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à $[0 ; 1]$,
   $$f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x).$$
   (c) Déterminer alors le sens de variation de la suite (I_n).
3. Soit n un entier naturel non nul.
   (a) Justifier que pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à $[0 ; 1]$,
   $$0 \leqslant f_n(x) \leqslant \mathrm{e}^{-2nx}.$$
   (b) En déduire un encadrement de la suite (I_n), puis sa limite.

EXERCICE 3 (4 points)

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
   $$z^2 - 2z + 5 = 0.$$
2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.
   On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_\mathrm{A}, z_\mathrm{B}, z_\mathrm{C}$ et z_D où :
   $$z_\mathrm{A} = 1 + 2\mathrm{i}, \quad z_\mathrm{B} = \overline{z_\mathrm{A}}, \quad z_\mathrm{C} = 1 + \sqrt{3} + \mathrm{i}, \quad z_\mathrm{D} = \overline{z_\mathrm{C}}.$$

(a) Placer les points A et B dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

(b) Calculer $\dfrac{z_{\text{B}} - z_{\text{C}}}{z_{\text{A}} - z_{\text{C}}}$ et donner le résultat sous forme algébrique.

(c) En déduire la nature du triangle ABC.

3. Démontrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle Γ dont on précisera le centre et le rayon.
4. Construire les points C et D dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. Expliquer la construction proposée.

EXERCICE 4 (5 points)

Une grande entreprise dispose d'un vaste réseau informatique. On observe le temps de fonctionnement normal séparant deux pannes informatiques. Ce temps sera appelé « temps de fonctionnement ». Soit X la variable aléatoire égale au temps de fonctionnement, exprimé en heures.

On admet que X suit une loi exponentielle de paramètre λ. Le paramètre λ est un réel strictement positif.

On rappelle que, pour tout réel $t \geqslant 0$, $\quad P(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda \text{e}^{-\lambda x}\,\text{d}x$.

1. On sait que la probabilité que le temps de fonctionnement soit inférieur à 7 heures est égale à $0,6$.

   Montrer qu'une valeur approchée de λ à 10^{-3} près est $0,131$.

   Dans les questions suivantes, on prendra 0,131 pour valeur approchée de λ et les résultats seront donnés à 10^{-2} près .
2. Montrer qu'une valeur approchée de la probabilité que le temps de fonctionnement soit supérieur à 5 heures est égale à $0,52$.
3. Calculer la probabilité que le temps de fonctionnement soit supérieur à 9 heures sachant qu'il n'y a pas eu de panne au cours des quatre premières heures.
4. Calculer la probabilité que le temps de fonctionnement soit compris entre 6 et 10 heures.
5. On relève aléatoirement huit temps de fonctionnement, qu'on suppose indépendants. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de relevés correspondant à des temps de fonctionnement supérieurs ou égaux à 5 heures.

   (a) Quelle est la loi suivie par Y ?

   (b) Calculer la probabilité que trois temps parmi ces huit soient supérieurs ou égaux à 5 heures

   (c) Calculer l'espérance mathématique de Y (on arrondira à l'entier le plus proche).