Terminale 9 sujets
Année 2014-2015

Ph DEPRESLE

3 avril 2015

Table des matières

1 Devoir n 1 Septembre 2014 2 heures

Terminale 9 , 10
Mercredi 24 Septembre 2014

INTERROGATION ÉCRITE N 1

EXERCICE 1 (5 points)
On comptait 700 élèves dans un lycée lors de la rentrée de 2012.
À la fin de chaque année scolaire, après le départ des nouveaux bacheliers et des élèves quittant l'établissement, le lycée conserve 70 % de son effectif pour l'année suivante.
Il reçoit 240 nouveaux élèves à chaque rentrée.

1. Calculer le nombre d'élèves dans le lycée aux rentrées 2013 et 2014.
2. On définit la suite (a_n) par :

$$a_0 = 700 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n,\ a_{n+1} = 0,7 \times a_n + 240.$$

   Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = a_n - 800$.
   (a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $0,7$.
   Préciser son premier terme.
   (b) Exprimer u_n en fonction de n.
   (c) En déduire l'expression de a_n en fonction de n.
3. On choisit de modéliser le nombre d'élèves du lycée par les termes de la suite (a_n).
   Il faudra agrandir le lycée dès que l'effectif sera supérieur ou égal à 780 élèves.
   (a) Montrer que résoudre l'inéquation $800 - 100 \times 0,7^n \geqslant 780$ revient à résoudre l'inéquation $0,7^n \leqslant 0,2$. On admettra que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,7^n = 0$.
   (b) Écrire un algorithme qui permet de déterminer la valeur de n.

EXERCICE 2 (5 points)
Étudier les limites :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2 - 4x + \sqrt{x}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+4} - \sqrt{x}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$
4. $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \dfrac{x^3 - x}{x^2+2x-3}$.
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3\sin x + 4}{x^2}$

EXERCICE 3 (5 points)
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n + 1.$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.
2. On considère l'algorithme suivant :

Variables	U est un nombre réel, N est un entier naturel
Entrée	Demander la valeur de N
Initialisation	U prend la valeur 1
Traitement	Pour I variant de 1 à N
	U prend la valeur $\frac{3}{2}\text{U} + 1$
	Fin Pour
Sortie	Afficher U

   A quoi correspond l'affichage final ?
3. Déterminer à l'aide de la calculatrice la valeur de U dans le cas où $N = 15$.
4. On pose la suite v_n définie par $v_n = u_n + c$.
   (a) Déterminer c pour que v_n soit une suite géométrique de raison $\frac{3}{2}$.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.
   (c) Exprimer en fonction de n l'expression $S = \sum_{1}^{n} u_n$

EXERCICE 4 (5 points)

Les parties **A** et **B** ne sont pas indépendantes.

Partie A :

1. Soit $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$. Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition. Interprétation graphique.
2. Soit $h(x) = 2x + 1 + \dfrac{6}{x - 3}$. Déterminer les limites de h aux bornes de son ensemble de définition. Interprétation graphique.
3. Soit d la droite d'équation $y = 2x + 1$. Déterminer la position relative de d par rapport à $\mathcal{C}_h$.

Partie B :

On pose $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1} & \text{si } x \leqslant 0 \\ 2x + 1 + \dfrac{6}{x - 3} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

1. Montrer que $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = g(0)$
2. la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$?

2 Devoir n 2 Octobre 2014 2 heures

Terminale 9
Lundi 13 Octobre 2014

INTERROGATION ÉCRITE N 1

EXERCICE 1 (6 points)

Soit $f : x \mapsto 3 + \dfrac{2}{\cos x}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Donner son domaine de définition.
2. Étudier la limite de f en 0. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}_f$?
3. Montrer que f est périodique de période 2π, et qu'elle est paire.
4. Étudier les variations de f sur $]0;\pi]$ et donner son tableau de variations.
5. Tracer $\mathcal{C}_f$ sur $]0;\pi]$.
6. Expliquer comment en déduire le tracé de $\mathcal{C}_f$ sur $\mathbb{R}$. Effectuer ce tracé.
7. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $\dfrac{\pi}{4}$.

EXERCICE 2 (6 points)

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x^3 + 6x^2 + 19x - 26$$

   (a) Par développement et identification, déterminer le réel α tels que :

$$g(x) = (x-1)(x^2 + \alpha x + 26)$$

   (b) En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$

2. On considère la fonction f définie sur $]-2;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 - 19x - 6}{(x+2)^2}$$

   (a) Calculer $f'(x)$ où f' est la dérivée de f. Démontrer que $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$ sur $]-2;+\infty[$.

   (b) Donner le sens de variation de f sur $]-2;+\infty[$.

   (c) Déterminer la limite de f en -2. En donner une interprétation graphique. $\mathcal{C}$ étant la courbe représentative de la fonction f.

   (d) Déterminer le nombre de solution de l'équation $f(x) = 0$ sur $]-2;+\infty[$.

3. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x - 4$.
Étudier la position relative de la droite $\mathcal{D}$ et de la courbe et tracer la courbe $\mathcal{C}$ seulement sur l'intervalle $[-1;10]$.

EXERCICE 3 (6 points)

Un volume constant de 2200 m^3 d'eau est réparti entre deux bassins A et B.
Le bassin A refroidit une machine. Pour des raisons d'équilibre thermique on crée un courant d'eau entre les deux bassins à l'aide de pompes.
On modélise les échanges entre les deux bassins de la façon suivante :

- au départ, le bassin A contient 800 m^3 d'eau et le bassin B contient 1400 m^3 d'eau ;
- tous les jours, 15 % du volume d'eau présent dans le bassin B au début de la journée est transféré vers le bassin A ;
- tous les jours, 10 % du volume d'eau présent dans le bassin A au début de la journée est transféré vers le bassin B.

Pour tout entier naturel n, on note :

- a_n le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin A à la fin du n-ième jour de fonctionnement ;
- b_n le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin B à la fin du n-ième jour de fonctionnement.

On a donc $a_0 = 800$ et $b_0 = 1400$.

1. Par quelle relation entre a_n et b_n traduit-on la conservation du volume total d'eau du circuit ?
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + 330$.
3. L'algorithme ci-dessous permet de déterminer la plus petite valeur de n à partir de laquelle a_n est supérieur ou égal à 1 100.
   Recopier cet algorithme en complétant les parties manquantes.

Variables	:	n est un entier naturel
		a est un réel
Initialisation	:	Affecter à n la valeur 0
		Affecter à a la valeur 800
Traitement	:	Tant que $a < 1100$, faire :
		Affecter à a la valeur ...
		Affecter à n la valeur ...
		Fin Tant que
Sortie	:	Afficher n

4. Pour tout entier naturel n, on note $u_n = a_n - 1320$.
   (a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   (b) Exprimer u_n en fonction de n.
   En déduire que, pour tout entier naturel n, $a_n = 1320 - 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

EXERCICE 4 (2 points)
Soit f définie par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
Déterminer a, b, c et d sachant que la courbe représentative de f passe par $A(1;2)$ et $B(-1;0)$ et admet en ces points une tangente horizontale.

3 Devoir n 3 Novembre 2014 3 heures

Terminale 9
Lundi 10 Novembre 2014

INTERROGATION ÉCRITE N 3

<u>EXERCICE 1</u> (5 points)

Une chaîne, suspendue entre deux points d'accroche de même hauteur peut être modélisée par la représentation graphique d'une fonction g définie sur $[-1\ ;\ 1]$ par

$$g(x) = \frac{1}{2a}\left(\mathrm{e}^{ax} + \mathrm{e}^{-ax}\right)$$

où a est un paramètre réel strictement positif. On ne cherchera pas à étudier la fonction g.

On montre en sciences physiques que, pour que cette chaîne ait une tension minimale aux extrémités, il faut et il suffit que le réel a soit une solution strictement positive de l'équation

$$(x-1)\mathrm{e}^{2x} - 1 - x = 0.$$

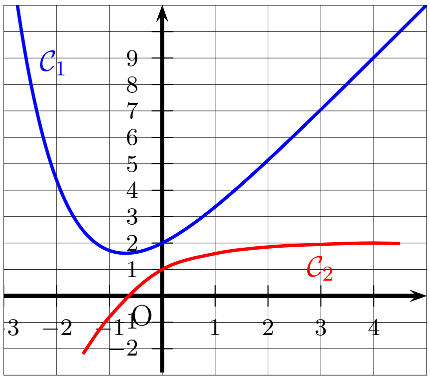
Dans la suite, on définit sur $[0\ ;\ +\infty[$ la fonction f par $f(x) = (x-1)\mathrm{e}^{2x} - 1 - x$ pour tout réel $x \geqslant 0$.

1. Déterminer la fonction dérivée de la fonction f.
   Vérifier que $f'(0) = -2$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$.
2. On note f'' la fonction dérivée de f'.
   Vérifier que, pour tout réel $x \geqslant 0$, $f''(x) = 4x\mathrm{e}^{2x}$.
3. Montrer que, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ la fonction f' s'annule pour une unique valeur, notée x_0.
4. (a) Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, puis montrer que $f(x)$ est négatif pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ x_0]$.
   (b) Calculer $f(2)$.
   En déduire que sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, la fonction f s'annule pour une unique valeur.
   Si l'on note a cette valeur, déterminer à l'aide de la calculatrice la valeur de a arrondie au centième.

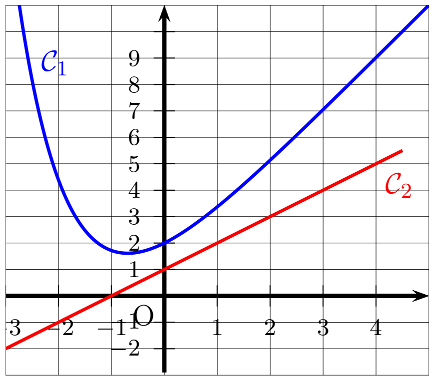
<u>EXERCICE 2</u> (5 points)
f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. f' est la fonction dérivée de la fonction f.
Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on nomme $\mathcal{C}_1$ la courbe représentative de la fonction f et $\mathcal{C}_2$ la courbe représentative de la fonction f'.
Le point A de coordonnées $(0\,;\,2)$ appartient à la courbe $\mathcal{C}_1$.
Le point B de coordonnées $(0\,;\,1)$ appartient à la courbe $\mathcal{C}_2$.

1. Dans les trois situations ci-dessous, on a dessiné la courbe représentative $\mathcal{C}_1$ de la fonction f. Sur l'une d'entre elles, la courbe $\mathcal{C}_2$ de la fonction dérivée f' est tracée convenablement. Laquelle ? Expliquer le choix effectué.

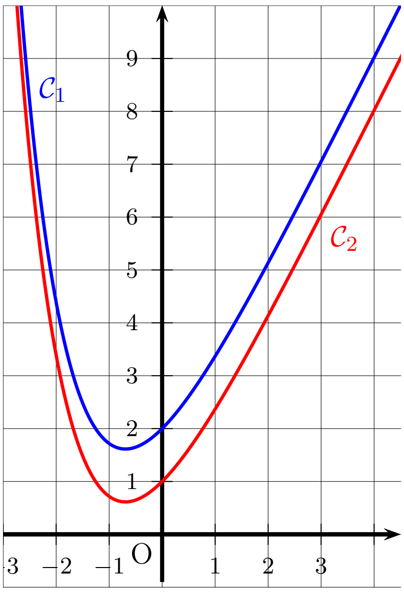
Situation 1



Situation 2 ($\mathcal{C}_2$ est une droite)



Situation 3



2. Déterminer l'équation réduite de la droite Δ tangente à la courbe $\mathcal{C}_1$ en A.
3. On sait que pour tout réel x, $f(x) = \mathrm{e}^{-x} + ax + b$ où a et b sont deux nombres réels.
   (a) Déterminer la valeur de b en utilisant les renseignements donnés par l'énoncé.
   (b) Prouver que $a = 2$.
4. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
5. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
6. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - (x + 2)$.
   (a) Montrer que la fonction g admet 0 comme minimum sur $\mathbb{R}$.
   (b) En déduire la position de la courbe $\mathcal{C}_1$ par rapport à la droite Δ.

<u>EXERCICE 3</u> (8 points)

Partie 1

Soit g la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + 1$.

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction g.
3. Donner le tableau de variations de g.
4. (a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[0\ ;\ +\infty[$ une unique solution. On note α cette solution.
   (b) À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
   (c) Démontrer que $e^{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.
5. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie 2

Soit A la fonction définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ telle que $A(x) = \dfrac{4x}{e^x + 1}$.

1. Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$, où g est la fonction définie dans la partie 1.
2. En déduire les variations de la fonction A sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Partie 3

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4}{e^x + 1}$.
On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Pour tout réel x positif ou nul, on note :

M le point de $(\mathcal{C})$ de coordonnées $(x\ ;\ f(x))$,
P le point de coordonnées $(x\ ;\ 0)$,
Q le point de coordonnées $(0\ ;\ f(x))$.

1. Démontrer que l'aire du rectangle OPMQ est maximale lorsque M a pour abscisse α.
   On rappelle que le réel α a été défini dans la partie 1.
2. Le point M a pour abscisse α.
   La tangente (T) en M à la courbe $(\mathcal{C})$ est-elle parallèle à la droite (PQ) ?
   <u>Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.</u>

<u>**EXERCICE 4**</u> (2 points)

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 9}{u_n - 2}$.

Soit $(v_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $v_n = \dfrac{1}{u_n - 3}$.

1. Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique.
2. En déduire v_n en fonction de n puis u_n en fonction de n.

4 Devoir n 4 Décembre 2014 3 heures

Terminale 9
Lundi 1 Décembre 2014

INTERROGATION ÉCRITE N 4

EXERCICE 1 (5 points)

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = 5\mathrm{e}^{-x} - 3\mathrm{e}^{-2x} + x - 3.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de la fonction f et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x - 3$ dans un repère orthogonal du plan.

Partie A : Positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}$

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = f(x) - (x - 3)$.

1. Justifier que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, $g(x) > 0$.
2. La courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite $\mathcal{D}$ ont-elles un point commun ? Justifier.

Partie B : Étude de la fonction g

On note M le point d'abscisse x de la courbe $\mathcal{C}_f$, N le point d'abscisse x de la droite $\mathcal{D}$ et on s'intéresse à l'évolution de la distance MN.

1. Justifier que, pour tout x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, la distance MN est égale à $g(x)$.
2. On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   Pour tout x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, calculer $g'(x)$.
3. Montrer que la fonction g possède un maximum sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ que l'on déterminera.
   En donner une interprétation graphique.

EXERCICE 2 (5 points)

Les parties A et B sont indépendantes

Une image numérique en noir et blanc est composée de petits carrés (pixels) dont la couleur va du blanc au noir en passant par toutes les nuances de gris. Chaque nuance est codée par un réel x de la façon suivante :

- $x = 0$ pour le blanc ;
- $x = 1$ pour le noir ;
- $x = 0,01$; $x = 0,02$ et ainsi de suite jusqu'à $x = 0,99$ par pas de $0,01$ pour toutes les nuances intermédiaires (du clair au foncé).

Un logiciel de retouche d'image utilise des fonctions numériques dites « fonctions de retouche ». Une fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ est dite « fonction de retouche » si elle possède les quatre propriétés suivantes :

- $f(0) = 0$;
- $f(1) = 1$;
- f est continue sur l'intervalle $[0\,;\,1]$;
- f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

Partie A

1. On considère la fonction f_1 définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :

$$f_1(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x.$$

   (a) Démontrer que la fonction f_1 est une fonction de retouche.

   (b) Résoudre graphiquement l'inéquation $f_1(x) \leqslant x$, à l'aide du graphique donné en annexe, à rendre avec la copie, en faisant apparaître les pointillés utiles.
   Interpréter ce résultat en termes d'éclaircissement ou d'assombrissement.

2. On considère la fonction f_2 définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :

$$f_2(x) = \ln[1 + (\mathrm{e} - 1)x].$$

   On admet que f_2 est une fonction de retouche.
   On définit sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ la fonction g par : $g(x) = f_2(x) - x$.

   (a) Établir que, pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,1]$: $g'(x) = \dfrac{(\mathrm{e}-2) - (\mathrm{e}-1)x}{1 + (\mathrm{e}-1)x}$;

   (b) Déterminer les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
   Démontrer que la fonction g admet un maximum en $\dfrac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1}$, maximum dont une valeur arrondie au centième est $0,12$.

   (c) Établir que l'équation $g(x) = 0,05$ admet sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ deux solutions α et β, avec $\alpha < \beta$.
   On admettra que : $0,08 < \alpha < 0,09$ et que : $0,85 < \beta < 0,86$.

Partie B

On remarque qu'une modification de nuance n'est perceptible visuellement que si la valeur absolue de l'écart entre le code de la nuance initiale et le code de la nuance modifiée est supérieure ou égale à $0,05$.

1. Dans l'algorithme décrit ci-dessous, f désigne une fonction de retouche.
   Quel est le rôle de cet algorithme ?

Variables :	x (nuance initiale)
	y (nuance retouchée)
	E (écart)
	c (compteur)
	k
Initialisation :	c prend la valeur 0
Traitement :	Pour k allant de 0 à 100, faire
	x prend la valeur $\frac{k}{100}$
	y prend la valeur $f(x)$
	E prend la valeur $\lvert y - x\rvert$
	Si $E \geqslant 0,05$, faire
	c prend la valeur $c + 1$
	Fin si
	Fin pour
Sortie :	Afficher c

2. Quelle valeur affichera cet algorithme si on l'applique à la fonction f_2 définie dans la deuxième question de la **partie A** ?

<u>EXERCICE 3</u> (5 points)

Partie A Restitution organisée des connaissances

On rappelle que $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{e^t}{t} = +\infty$.

Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x - \frac{\ln(x)}{x}$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\text{O}\ ;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$.

1. Soit g la fonction définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = x^2 - 1 + \ln(x)$.
   Montrer que la fonction g est positive sur $[1\ ;\ +\infty[$.
2. (a) Montrer que, pour tout x de $[1\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
   (b) En déduire le sens de variation de f sur $[1\ ;\ +\infty[$.
   (c) Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.
   (d) Étudier la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite $\mathcal{D}$.
3. Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on note respectivement M_k et N_k les points d'abscisse k de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.
   (a) Montrer que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, la distance M_kN_k entre les points M_k et N_k est donnée par $M_kN_k = \dfrac{\ln(k)}{k}$.
   (b) Écrire un algorithme déterminant le plus petit entier k_0 supérieur ou égal à 2 tel que la distance M_kN_k soit inférieure ou égale à 10^{-2}.

EXERCICE 4 (5 points)

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n par

$$\begin{cases} v_0 &= 1 \\ v_{n+1} &= \dfrac{9}{6-v_n} \end{cases}$$

Partie A

1. On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel n donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang n.
   Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient. Préciser lequel en justifiant la réponse.

Algorithme N° 1	**Algorithme N° 2**	**Algorithme N° 3**
Variables : v est un réel i et n sont des entiers naturels **Début de l'algorithme :** Lire n v prend la valeur 1 Pour i variant de 1 à n faire v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$ Fin pour Afficher v **Fin algorithme**	**Variables :** v est un réel i et n sont des entiers naturels **Début de l'algorithme :** Lire n Pour i variant de 1 à n faire v prend la valeur 1 Afficher v v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$ Fin pour **Fin algorithme**	**Variables :** v est un réel i et n sont des entiers naturels **Début de l'algorithme :** Lire n v prend la valeur 1 Pour i variant de 1 à n faire Afficher v v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$ Fin pour Afficher v **Fin algorithme**

2. Pour $n = 10$ on obtient l'affichage suivant :

1	1,800	2,143	2,333	2,455	2,538	2,600	2,647	2,684	2,714

   Pour $n = 100$, les derniers termes affichés sont :

2,967	2,968	2,968	2,968	2,969	2,969	2,969	2,970	2,970	2,970

   Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (v_n) ?

3. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < v_n < 3$.

   (b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{(3-v_n)^2}{6-v_n}$.

Partie B (v_n)

On considère la suite (w_n) définie pour tout n entier naturel par

$$w_n = \frac{1}{v_n - 3}.$$

1. Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$
2. En déduire l'expression de (w_n), puis celle de (v_n) en fonction de n.

5 Devoir n 5 Janvier 2015 3 heures

Terminale 9
Lundi 12 Janvier 2015

INTERROGATION ÉCRITE N 5

EXERCICE 1 (5 points)

On considère les deux courbes $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ d'équations respectives $y = \mathrm{e}^x$ et $y = -x^2 - 1$ dans un repère orthogonal du plan.
Le but de cet exercice est de prouver qu'il existe une unique tangente $\mathcal{T}$ commune à ces deux courbes.

1. Sur le graphique représenté dans l'annexe, tracer approximativement une telle tangente à l'aide d'une règle.

   Lire graphiquement l'abscisse du point de contact de cette tangente avec la courbe $(\mathcal{C}_1)$ et l'abscisse du point de contact de cette tangente avec la courbe $(\mathcal{C}_2)$.

2. On désigne par a et b deux réels quelconques, par A le point d'abscisse a de la courbe $(\mathcal{C}_1)$ et par B le point d'abscisse b de la courbe $(\mathcal{C}_2)$.
   (a) Déterminer une équation de la tangente $(\mathcal{T}_\mathrm{A})$ à la courbe $(\mathcal{C}_1)$ au point A.
   (b) Déterminer une équation de la tangente $(\mathcal{T}_\mathrm{B})$ à la courbe $(\mathcal{C}_2)$ au point B.
   (c) En déduire que les droites $(\mathcal{T}_\mathrm{A})$ et $(\mathcal{T}_\mathrm{B})$ sont confondues si et seulement si les réels a et b sont solutions du système (S) :
   $$\left\{\begin{array}{lcl} \mathrm{e}^a & = & -2b \\ \mathrm{e}^a - a\mathrm{e}^a & = & b^2 - 1 \end{array}\right. .$$
   (d) Montrer que le système (S) est équivalent au système (S′) :
   $$\left\{\begin{array}{lcl} \mathrm{e}^a & = & -2b \\ \mathrm{e}^{2a} + 4a\mathrm{e}^a - 4\mathrm{e}^a - 4 & = & 0 \end{array}\right. .$$

3. Le but de cette question est de prouver qu'il existe un unique réel solution de l'équation
   $$(\mathrm{E}) \quad : \quad \mathrm{e}^{2x} + 4x\mathrm{e}^x - 4\mathrm{e}^x - 4 = 0.$$
   On admettra que cette équation n'admet pas de solution dans l'intervalle $]-\infty; 0[$.

   On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :
   $$f(x) = \mathrm{e}^{2x} + 4x\mathrm{e}^x - 4\mathrm{e}^x - 4.$$
   (a) Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   (b) Démontrer que l'équation (E) admet une solution unique dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$. On note a cette solution. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de a.

<u>EXERCICE 2</u> (5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1. **Proposition** : Pour tout entier naturel n : $(1+\mathrm{i})^{4n} = (-4)^n$.
2. Soit (E) l'équation $(z-4)\left(z^2-4z+8\right)=0$ où z désigne un nombre complexe.
   Proposition : Les points dont les affixes sont les solutions, dans $\mathbb{C}$, de (E) sont les sommets d'un triangle d'aire 8.
3. **Proposition** : Pour tout nombre réel α, $1+\mathrm{e}^{2i\alpha} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\cos(\alpha)$.
4. Soit A le point d'affixe $z_{\mathrm{A}} = \dfrac{1}{2}(1+\mathrm{i})$ et M_n le point d'affixe $\left(z_{\mathrm{A}}\right)^n$ où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   Proposition : si $n-1$ est divisible par 4, alors les points O, A et M_n sont alignés.
5. Soit j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{2\pi}{3}$.
   Proposition : $1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2=0$.

<u>EXERCICE 3</u> (5 points)

<u>Pour chacune des questions, une seule des réponses **a,** b ou **c** est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse inexacte enlève 1 point. L'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total des points est négatif, la note est ramenée à 0.</u>

1. Le nombre réel $\mathrm{e}^{\frac{3x}{2}}$ est égal à :

   a. $\dfrac{\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^2}$ **b.** $\mathrm{e}^{3x}-\mathrm{e}^2$ **c.** $\left(\sqrt{\mathrm{e}^x}\right)^3$

2. L'équation $\ln\left(x^2+x+1\right)=0$ admet sur $\mathbb{R}$:

   a. Aucune solution **b.** Une seule solution **c.** Deux solutions

3. L'équation $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{-x}$ admet sur $\mathbb{R}$:

   a. Aucune solution **b.** Une seule solution **c.** Deux solutions

4. On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ vérifiant la propriété suivante :
   Pour tout $x \in [1\ ;\ +\infty[$, $\dfrac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant 1$.
   On peut alors affirmer que :

   a. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ **b.** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ **c.** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$

5. On considère deux fonctions f et g définies sur un intervalle I, telles que g est une primitive de la fonction f sur I. On suppose que la fonction g est croissante sur I. Alors on peut affirmer que :

   a. La fonction g est positive sur I. **b.** La fonction f est positive sur I. **c.** La fonction f est croissante sur I.

EXERCICE 4 (5 points)
Les parties A et B sont indépendantes
On considère l'équation (E)

$$z^3 - (4+\mathrm{i})z^2 + (7+\mathrm{i})z - 4 = 0$$

où z désigne un nombre complexe.

Partie A

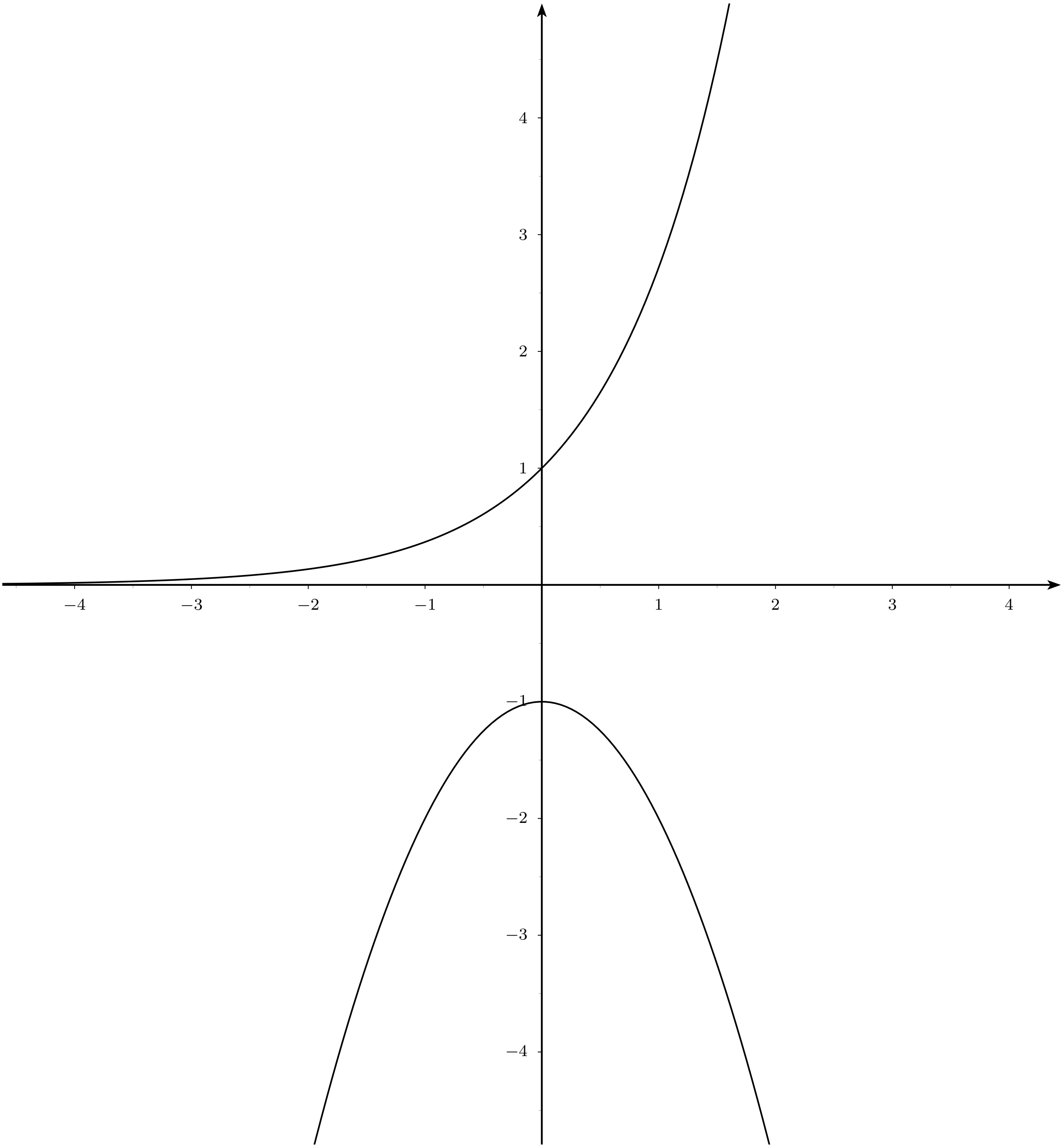
1. (a) Montrer que (E) admet une solution réelle, note z_1.
   (b) Déterminer les deux nombres complexes a et b tels que, pour tout nombre complexe z on ait :

$$z^3 - (4+\mathrm{i})z^2 + (7+\mathrm{i})z - 4 = (z - z_1)(z - 2 - 2\mathrm{i})(az + b)$$

2. Résoudre (E).

Partie B
Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on considère les trois points A, B et C d'affixes respectives 1, $2 + 2\mathrm{i}$ et $1 - \mathrm{i}$.

1. Représenter A, B et C.
2. Déterminer le module et un argument de $\dfrac{2+2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$. En déduire la nature du triangle OBC.
3. Que représente la droite (OA) pour le triangle OBC ? Justifier votre affirmation.
4. Déterminer l'affixe de D pour que OCDB soit un parallélogramme.


4
3
2
1
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
−1
−2
−3
−4

6 Devoir n 6 Février 2015 3 heures

Terminale 9
Lundi 2 Février 2015

INTERROGATION ÉCRITE N 6

EXERCICE 1 (5 points)

Dans cet exercice, pour chaque probabilité demandée, on donnera sa valeur exacte, écrite sous forme de fraction irréductible.

Un marchand de parapluies ouvre son magasin 240 jours par an et sur ces journées, il y a 80 jours de beau temps, 40 jours de pluie et 120 jours de temps maussade.

- Il constate que lors d'une journée de beau temps, il a une probabilité de $\dfrac{3}{4}$ de ne pas vendre de parapluie, et une probabilité de $\dfrac{1}{4}$ de vendre un parapluie.
- Lors d'une journée de pluie, il a une probabilité de $\dfrac{1}{4}$ de vendre un parapluie, une probabilité de $\dfrac{1}{4}$ de vendre deux parapluies et une probabilité de $\dfrac{1}{2}$ de vendre trois parapluies.
- Lors d'une journée de temps maussade, il a une probabilité de $\dfrac{1}{4}$ de ne pas vendre de parapluie, une probabilité de $\dfrac{1}{2}$ de vendre un parapluie et une probabilité de $\dfrac{1}{4}$ de vendre deux parapluies.

Pour une journée quelconque d'ouverture du magasin, on considère les évènements suivants :
B : « Le temps est beau »,
P : « Le temps est pluvieux »,
M : « Le temps est maussade ».
X désigne la variable aléatoire représentant le nombre de parapluies vendus ce jour-là.

1. Compléter l'arbre donné avec les probabilités correspondantes.
2. (a) Sachant qu'il fait beau, quelle est la probabilité P_1 que le commerçant ne vende pas de parapluie ce jour-là ?
   (b) Sachant qu'il pleut, quelle est la probabilité P_2 que le commerçant vende au moins deux parapluies ce jour-là ?
3. (a) Quelle est la probabilité $P(X = 0)$ que le commerçant ne vende pas de parapluie ce jour-là ?
   (b) Quelle est la probabilité $P(X = 2)$ que le commerçant vende deux parapluies ce jour-là ?
   (c) Quelle est la probabilité $P(X = 3)$ que le commerçant vende trois parapluies ce jour-là ?
4. (a) Compléter le tableau qui donne la loi de la variable aléatoire X.
   (b) Calculer l'espérance $\mathrm{E}(X)$ de la variable aléatoire X.
5. Il vend chaque parapluie 10 euros. Quel est le gain moyen G, en euros, que lui rapporte sa vente de parapluies pour un an ?

6. Sachant que, lors d'une journée donnée, le commerçant a vendu un seul parapluie, quelle est la probabilité P_3 que ce soit une journée de beau temps ?

EXERCICE 2 (5 points)

On considère la fonction f définie, pour tout réel x, par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^{x} + 3.$$

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentant f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$.

1. (a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Justifier la réponse.

   (b) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Justifier la réponse.

   (c) En déduire que $\mathcal{C}$ admet, au voisinage de $-\infty$, une asymptote Δ dont on donnera une équation.

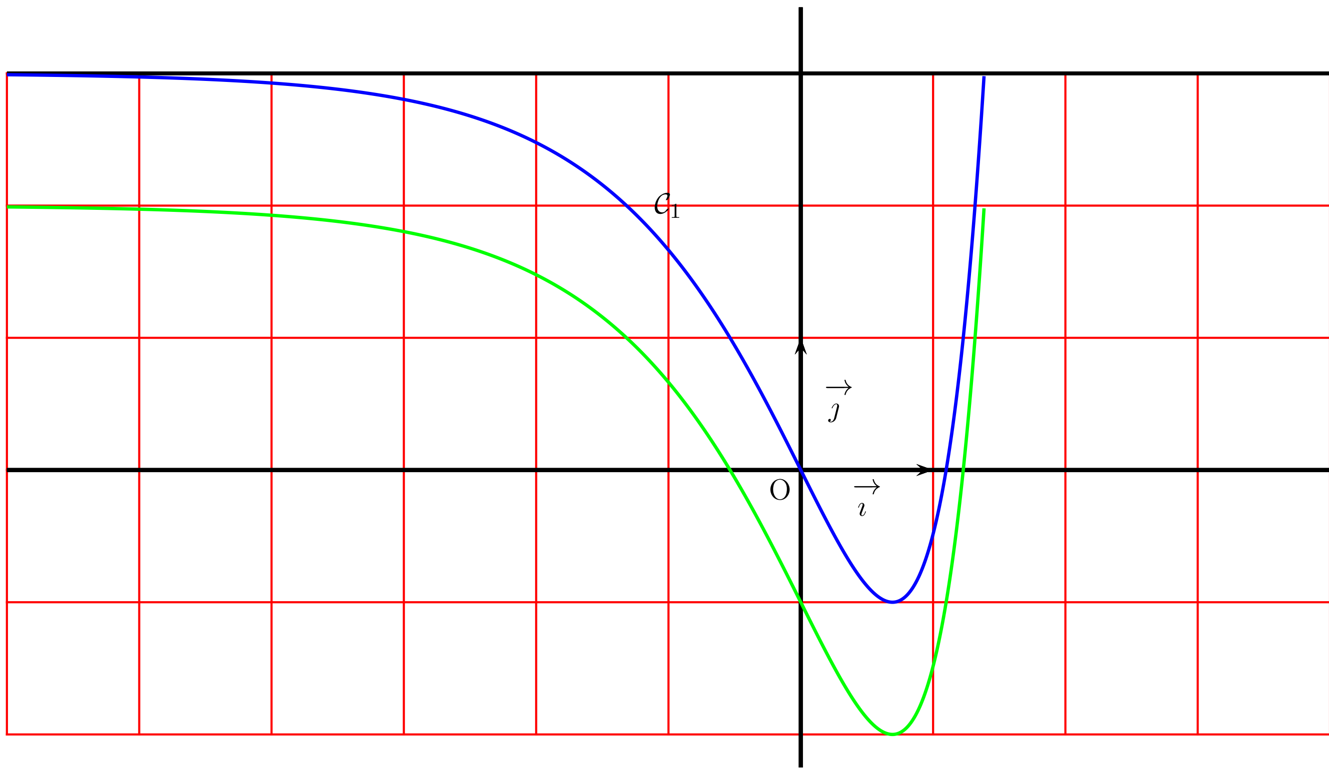
2. (a) f' désigne la dérivée de f. Déterminer $f'(x)$.

   (b) Pour tout réel x, $f'(x)$ s'écrit sous la forme : $f'(x) = g(x)\left(\mathrm{e}^{x} - 2\right)$.
   Donner l'expression de $g(x)$.

   (c) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

   (d) f présente un minimum au point $M\ (x_M\ ;\ y_M)$. Déterminer les coordonnées $(x_M\ ;\ y_M)$ de M. Détailler le calcul de y_M.

3. Une des deux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ dessinées sur la figure ci-dessous représente la fonction f. Laquelle ? Justifier votre réponse.



4. Déterminer une équation de la tangente T_0 à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0. Tracer T_0 sur la figure du 3.

5. On admet que la courbe $\mathcal{C}$ coupe l'asymptote Δ en un seul point E.
   Déterminer les coordonnées $(x_{\text{E}}\ ;\ y_{\text{E}})$ du point E. Détailler les calculs.

EXERCICE 3 (5 points)

Partie A :

On considère le polynôme P défini sur $\mathcal{C}$ par

$$P(z) = z^3 - \left(2 + \mathrm{i}\sqrt{2}\right) z^2 + 2\left(1 + \mathrm{i}\sqrt{2}\right) z - 2\mathrm{i}\sqrt{2}.$$

1. Montrer que le nombre complexe $z_0 = \mathrm{i}\sqrt{2}$ est solution de l'équation $P(z) = 0$.
2. (a) Déterminer les réels a et b tels que $P(z) = \left(z - \mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(z^2 + az + b\right)$.
   (b) En déduire les solutions dans $\mathcal{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

Partie B :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra 2 cm pour unité graphique.
On considère les points A, B, J et K d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = 1 + \mathrm{i}, \quad z_{\text{B}} = 1 - \mathrm{i}, \quad z_{\text{J}} = \mathrm{i}\sqrt{2} \quad \text{et } z_{\text{K}} = \mathrm{e}^{\frac{3\mathrm{i}\pi}{4}}.$$

1. Placer les points A, B, J, K sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.
2. Soit L le symétrique du point J par rapport au point K. Montrer que l'affixe de L est égale à $-\sqrt{2}$.
3. Montrer que les points A, B, J et L appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.
4. Soit D le point d'affixe $z_{\text{D}} = -1 + \mathrm{i}$ et le point C a pour d'affixe $z_{\text{C}} = \overline{z_{\text{D}}}$. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier la réponse.

EXERCICE 4 (5 points)

Les parties A et B sont indépendantes.

PARTIE A :

ROC : Démontrer que si deux événements A et B de probabilités non nulles sont indépendants pour la probabilité P , alors il en est de même pour les événements $\overline{A}$ et B.

PARTIE B :

On dispose de deux urnes et d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
L'urne U_1 contient trois boules rouges et une boule noire.
L'urne U_2 contient trois boules rouges et deux boules noires.
Une partie se déroule de la façon suivante : le joueur lance le dé ; si le résultat est 1, il tire au hasard une boule dans l'urne U_1, sinon il tire au hasard une boule dans l'urne U_2.
On considère les évènements suivants :
A : « obtenir 1 en lançant le dé »
B : « obtenir une boule noire ».

1. (a) Construire un arbre pondéré traduisant cette expérience aléatoire.
   (b) Montrer que la probabilité d'obtenir une boule noire est $\frac{3}{8}$.
   (c) Sachant que l'on a tiré une boule noire, calculer la probabilité d'avoir obtenu 1 en lançant le dé.
2. On convient qu'une partie est gagnée lorsque la boule obtenue est noire. Une personne joue dix parties indépendantes en remettant, après chaque partie, la boule obtenue dans l'urne d'où elle provient. On note X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées.
   (a) Calculer la probabilité de gagner exactement trois parties. On donnera le résultat arrondi au millième.
   (b) Calculer la probabilité de gagner au moins une partie. On donnera le résultat arrondi au millième.
   (c) Déterminer le nombre minimal de parties que le joueur doit jouer afin que la probabilité de gagner au moins une fois soit supérieure à 90 %.

7 Devoir n 7 Mars 2015 3 heures

Terminale 9
Lundi 9 Mars 2015

INTERROGATION ÉCRITE N 7

<u>EXERCICE 1</u> (5 points)

1. On considère l'algorithme suivant :

Entrée	Saisir un réel strictement positif non nul a Saisir un réel strictement positif non nul $b (b > a)$ Saisir un entier naturel non nul N
Initialisation	Affecter à u la valeur a Affecter à v la valeur b Affecter à n la valeur 0
Traitement	TANT QUE $n < N$ Affecter à n la valeur $n + 1$ Affecter à u la valeur $\dfrac{a+b}{2}$ Affecter à v la valeur $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ Affecter à a la valeur u Affecter à b la valeur v
Sortie	Afficher u, afficher v

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $a = 4$, $b = 9$ et $N = 2$. Les valeurs successives de u et v seront arrondies au millième.

n	a	b	u	v
0	4	9		
1				
2				

Dans la suite, a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$.
On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :
$u_0 = a, v_0 = b$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 + v_n^2}{2}}$$

2. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

   (b) Démontrer que, pour tout entier naturel n : $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \left(\dfrac{u_n - v_n}{2}\right)^2$.

   En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant v_n$.

3. (a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

(b) Comparer v_{n+1}^2 et v_n^2. En déduire le sens de variation de la suite (v_n).

4. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

EXERCICE 2 (5 points)

Un sac contient trois boules numérotées respectivement 0, 1.et 2, indiscernables au toucher.
On tire une boule du sac, on note son numéro x et on la remet dans le sac ; puis on tire une seconde boule, on note son numéro y et on la remet dans le sac.
Toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées.
À chaque tirage de deux boules, on associe dans le plan, muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ le point M de coordonnées $(x; y)$.
On désigne par D le disque de centre a et de rayon 1,7.
Les résultats seront donnés sous forme de fraction irréductible.

1. Placer dans le plan : muni du repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ les points correspondant aux différents résultats possibles.
2. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   A : "Le point M est sur l'axe des abscisses" ;
   B : "Le point M appartient au cercle de centre O et de rayon 1 ».
3. Soit X là variable aléatoire qui, à chaque tirage de deux boules,associe la somme $x^2 + y^2$.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X , Calculer son espérance mathématique $E(X)$.
   (b) Montrer que la probabilité de l'événement " le point M appartient au disque D " est égale à $\dfrac{4}{9}$.
4. On tire 5 fois de suite, de façon indépendante, deux boules' successivement et avec remise, On obtient ainsi 5 points du plan.
   Quelle est la probabilité de l'événement C " au moins un de ces points appartient au disque D ". ?
5. On renouvelle n fois de suite, de façon indépendante, le tirage de deux boules successivement et avec remise. On obtient ainsi n points du plan.
   Déterminer le plus petit entier n strictement positif tel que la probabilité de l'événement " au moins un de ces points appartient à D " soit supérieure ou égale à 0,9999.

EXERCICE 3 (5 points)

Les questions 1 et 2 sont indépendantes

1. Une urne contient quatre boules rouges et deux boules noires indiscernables au toucher.

   On prélève au hasard une boule de l'urne.

   Si elle est rouge, on la remet dans l'urne et on prélève au hasard une seconde boule.

   Si la première boule est noire, on prélève au hasard une seconde boule dans l'urne sans remettre la boule tirée.

   (a) Quelle est la probabilité que les boules tirées soient rouges ?

   (b) Calculer la probabilité que la seconde boule tirée soit noire.

   Calculer la probabilité que la première boule soit rouge sachant que la seconde est noire.

2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

   Une urne contient quatre boules rouges et n boules noires indiscernables au toucher.

   On prélève successivement et au hasard quatre boules de l'urne en remettant dans l'urne la boule tirée après chaque tirage.

   La variable aléatoire X donnant le nombre de boules rouges tirées au cours de ces quatre tirages suit la loi binomiale de paramètres 4 et p.

   (a) Donner l'expression de p en fonction de n.

   (b) Démontrer que la probabilité q_n que l'une au moins des quatre boules tirées soit noire est telle que $q_n = 1 - \left(\dfrac{4}{n+4}\right)^4$.

   (c) Quel est le plus petit entier naturel n pour lequel la probabilité q_n est supérieure ou égale à 0,9999 ?

EXERCICE 4 (5 points)

L'objet de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$u_0 = 3 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{7}{u_n}\right) \qquad (\star)$$

On pourra utiliser sans démonstration le fait que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

1. On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{7}{x}\right).$$

   Démontrer que la fonction f admet un minimum.

   En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant \sqrt{7}$.

2. (a) Soit n un entier naturel quelconque.

   Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.

   (b) Pourquoi peut-on en déduire que la suite (u_n) est convergente ?

   (c) On déduit de la relation $(\star)$ que la limite ℓ de cette suite est telle que $\ell = \dfrac{1}{2}\left(\ell + \dfrac{7}{\ell}\right)$.

   Déterminer ℓ.

3. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - \sqrt{7} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\left(u_n - \sqrt{7}\right)^2}{u_n}$.

4. On définit la suite (d_n) par :

$$d_0 = 1 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ d_{n+1} = \frac{1}{2}d_n^2.$$

   (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$u_n - \sqrt{7} \leqslant d_n.$$

   (b) Voici un algorithme :

Variables :	n et p sont des entiers naturels
	d est un réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de p.
Initialisations :	Affecter à d la valeur 1.
	Affecter à n la valeur 0
Traitement :	Tant que $d > 10^{-p}$.
	Affecter à d la valeur $0,5d^2$
	Affecter à n la valeur $n+1$.
Sortie :	Afficher n.

En entrant la valeur 9, l'algorithme affiche le nombre 5.

Quelle inégalité peut-on en déduire pour d_5 ?

Justifier que u_5 est une valeur approchée de $\sqrt{7}$ à 10^{-9} près.

8 Devoir n 8 Avril 2015 3 heures

Terminale 9
Lundi 30 Mars 2015

INTERROGATION ÉCRITE N 8

EXERCICE 1 (5 points)
Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère le tétraèdre ABCD dont les sommets ont pour coordonnées :

$$A\left(1 ; -\sqrt{3} ; 0\right) ; B\left(1 ; \sqrt{3} ; 0\right) ; C(-2 ; 0 ; 0) ; D\left(0 ; 0 ; 2\sqrt{2}\right).$$

1. Démontrer que le plan (ABD) a pour équation cartésienne $4x + z\sqrt{2} = 4$.
2. On note $\mathcal{D}$ la droite dont une représentation paramétrique est

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t \\ y & = & 0 \\ z & = & t\sqrt{2} \end{array}\right. , t \in \mathbb{R}$$

   (a) Démontrer que $\mathcal{D}$ est la droite qui est parallèle à (CD) et passe par O.
   (b) Déterminer les coordonnées du point G, intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan (ABD).
3. (a) On note L le milieu du segment [AC].
   Démontrer que la droite (BL) passe par le point O et est orthogonale à la droite (AC).
   (b) Prouver que le triangle ABC est équilatéral et déterminer le centre de son cercle circonscrit.
4. Démontrer que le tétraèdre ABCD est régulier c'est-à-dire un tétraèdre dont les six arêtes ont la même longueur.

EXERCICE 2 (5 points)

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1; +\infty[$ par : $f(x) = x^2 + 1 - \ln x$.
On note $\mathbb{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan.
1. Étudier la limite de f en $+\infty$.
2. Démontrer que f est croissante sur l'intervalle $[1; +\infty[$.
3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathbb{C}$ au point d'abscisse 1.

Partie B

Soit g la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par $g(x) = f(x) - (x + 1)$.
1. Etudier le sens de variation de g sur l'intervalle $[1; +\infty[$.
2. Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$ pour $x \in [1; +\infty[$.
3. Déduire de ce qui précède la position de $\mathbb{C}$ par rapport à T.

Partie C

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1$.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.
4. En déduire la limite de (u_n).

<u>EXERCICE 3</u> (5 points)

1. **Question de cours**
   Soit A et B deux événements associés à une épreuve aléatoire.
   Démontrer que si A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ et B sont indépendants.
2. Dans un lycée donné, on sait que 55% des élèves sont des filles. on sait également que 35% des filles et 30% des garçons déjeunent à la cantine. On choisit au hasard un élève du lycée. Quelle est la probabilité que cet élève ne déjeune pas à la cantine ?
3. Une variable aléatoire Y suit une loi binomiale de paramètres 18 et $\dfrac{1}{4}$.
   Calculer la probabilité que Y soit supérieure ou égale à 2. Donner une valeur approchée du résultat à 10^{-3} près.
4. Un appareil ménager peut présenter après sa fabrication deux défauts. On appelle A l'événement « l'appareil présente un défaut d'apparence » et F l'événement « l'appareil présente un défaut de fonctionnement ».
   On suppose que les événements A et F sont indépendants.
   On sait que la probabilité que l'appareil présente un défaut d'apparence est égale à 0,02 et que l'appareil présente au moins l'un des deux défauts est égale à 0,069.
   On choisit au hasard un des appareils. Quelle est la probabilité que l'appareil présente le défaut F ?
5. Dans le plan rapporté au repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $z = 2i + 2ie^{i\theta}$,où θ décrit $\mathbb{R}$.

<u>EXERCICE 4</u> (5 points)

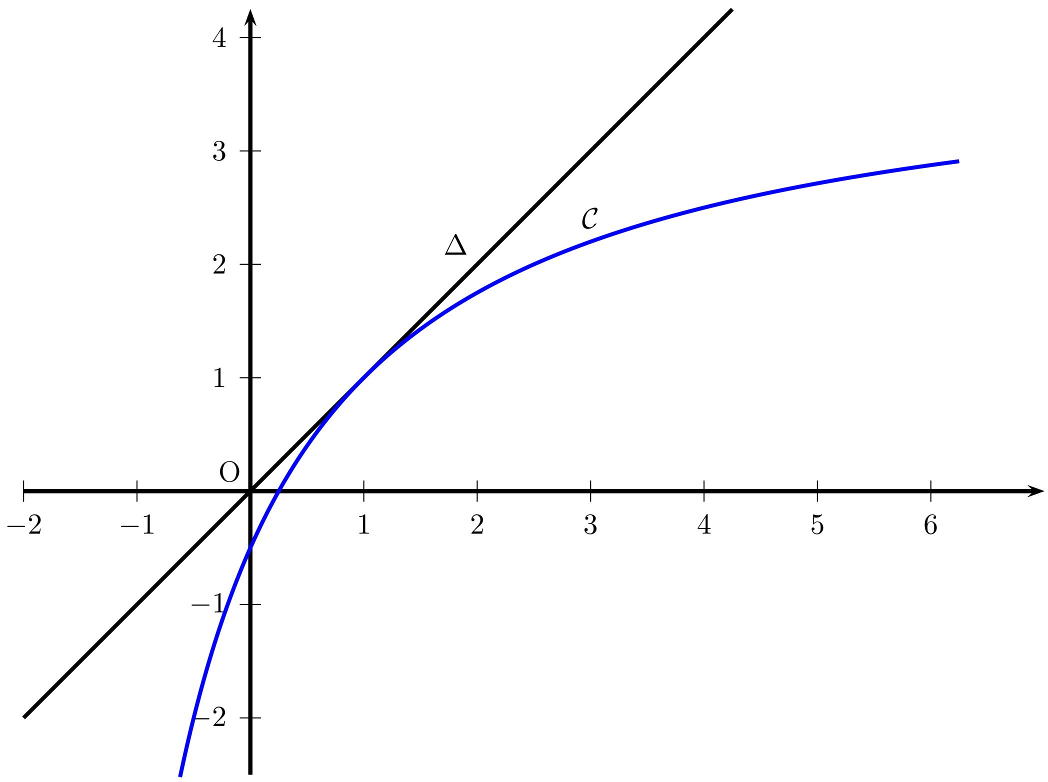
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout nombre entier naturel n, par $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2}$.

Si f est la fonction définie sur l'intervalle $]-2\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x-1}{x+2}$, alors on a, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
On donne en annexe (à rendre avec la copie) une partie de la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.

1. (a) Sur l'axe des abscisses, placer u_0 puis construire u_1, u_2 et u_3 en laissant apparents les traits de construction.
   (b) Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et sur la convergence de la suite (u_n) ?

2. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout nombre entier naturel n, on a $u_n - 1 > 0$.
   (b) <u>Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.</u>
   Valider par une démonstration les conjectures émises à la question 1. b.
3. Dans cette question, on se propose d'étudier la suite (u_n) par une autre méthode, en déterminant une expression de u_n en fonction de n.
   Pour tout nombre entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{3}$.
   (b) Pour tout nombre entier naturel n, exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
   (c) En déduire la limite de la suite (u_n).

ANNEXE (Exercice 4)
(à rendre avec la copie)



9 Devoir n 9 Mai 2015 4 heures