

# Terminale sujets Année 2017-2018

Ph DEPRESLE

27 mai 2018

## **Table des matières**

<b>1 Devoir n 1 Septembre 2017 2 heures</b>	<b>2</b>
<b>2 Devoir n 2 Octobre 2017 2 heures</b>	<b>4</b>
<b>3 Devoir n 3 Novembre 2017 2 heures</b>	<b>6</b>
<b>4 Devoir n 4 Décembre 2017 2 heures</b>	<b>8</b>
<b>5 Devoir n 5 Janvier 2018 3 heures</b>	<b>11</b>
<b>6 Devoir n 6 Février 2018 3 heures</b>	<b>13</b>
<b>7 Devoir n 7 Bac Blanc Mars 2018 4 heures</b>	<b>17</b>
<b>8 Devoir n 8 Mars 2018 3 heures</b>	<b>22</b>
<b>9 Devoir n 9 Mai 2018 2 heures</b>	<b>26</b>
<b>10 Devoir n 10 Mai 2018 3 heures</b>	<b>31</b>

# 1 Devoir n 1 Septembre 2017 2 heures

Terminale 10

Mercredi 20 Septembre 2017



## INTERROGATION ÉCRITE N 1

### EXERCICE 1 (5 points)

#### Partie A :

Calculer

1.  $A = (1 + \sqrt{8})^2 + \frac{3}{1 - \sqrt{2}} + 7\sqrt{2}$

2.  $B = \frac{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}} + \frac{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{3}}} + \frac{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{4}}}$

#### Partie B :

Soit la suite  $(u_n)$  définie par :  $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n - 1 \end{cases}$  pour tout entier naturel  $n$ .

- Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n > 2$ .
- On définit la suite  $(v_n)$  par  $v_n = u_n - 2$  pour tout entier naturel  $n$ .
  - Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{3}{2}$ .
  - Exprimer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$ .

### EXERCICE 2 (5 points)

Soit  $(u_n)$  la suite définie par son premier terme  $u_0$  et, pour tout entier naturel  $n$ , par la relation

$$u_{n+1} = au_n + b \quad (a \text{ et } b \text{ réels non nuls tels que } a \neq 1).$$

On pose, pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$ .

- Démontrer que, la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison  $a$ .
- En mars 2017, Max achète une plante verte mesurant 80 cm. On lui conseille de la tailler tous les ans, au mois de mars, en coupant un quart de sa hauteur. La plante poussera alors de 30 cm au cours des douze mois suivants.  
Dès qu'il rentre chez lui, Max taille sa plante.  
Quelle sera la hauteur de la plante en mars 2018 avant que Max ne la taille ?
- Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $h_n$  la hauteur de la plante, avant sa taille, en mars de l'année  $(2018 + n)$ .  
Justifier que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $h_{n+1} = 0,75h_n + 30$ .
- Conjecturer à l'aide de la calculatrice le sens de variations de la suite  $(h_n)$ .  
Démontrer cette conjecture (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).
- Donner un algorithme permettant de calculer  $h_{12}$ .

**EXERCICE 3** (5 points)

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites définies par :

$$u_0 = 1 \quad v_0 = 2 \quad u_{n+1} = \frac{2u_n \cdot v_n}{u_n + v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n)$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u_n > 0$  et  $v_n > 0$ .
2. Soit  $(w_n)$  définie par  $w_n = v_n - u_n$ .
  - (a) Démontrer que  $w_{n+1} = \frac{w_n^2}{2(u_n + v_n)}$
  - (b) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $w_n \geq 0$
  - (c) En vous servant de la question 2.a. démontrer que  $w_{n+1} \leq \frac{1}{2}w_n$ .
  - (d) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $w_n \leq \frac{1}{2^n}$ .

**EXERCICE 4** (5 points)

Soit  $(u_n)$  une suite définie pour tout entier naturel  $n$  non nul par :

$$u_1 = -1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{n}{2(n+1)}u_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)}$$

1. Calculer  $u_2$  et  $u_3$ . La suite  $(u_n)$  est-elle arithmétique ? est-elle géométrique ?
2. Soit la suite  $(v_n)$  définie par  $v_n = n(3 - u_n)$ .
  - (a) Démontrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique pour tout entier naturel non nul  $n$ .
  - (b) En déduire  $v_n$  en fonction de  $n$ .
  - (c) En déduire  $u_n$  en fonction de  $n$ .
3. La suite  $(u_n)$  est-elle croissante ?

## 2 Devoir n 2 Octobre 2017 2 heures

Terminale 10

Mercredi 11 Octobre 2017



### INTERROGATION ÉCRITE N 2

#### EXERCICE 1 (4 points)

Étudier les limites des expressions suivantes :

1.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{x^2 - 8x + 1}{x^2 - 4}$

2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 4x + 3} + x + 2$

3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + \cos x}{x + 2}$

4.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - 2x + 3$

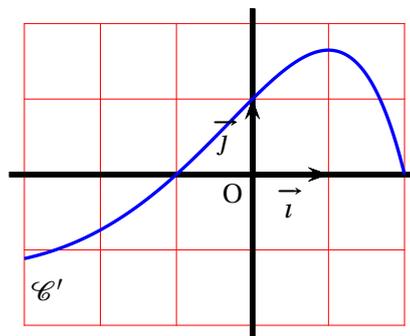
#### EXERCICE 2 (4 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

On considère une fonction  $f$  dérivable sur l'intervalle  $[-3; 2]$ .

On dispose des informations suivantes :

- $f(0) = -1$ .
- la dérivée  $f'$  de la fonction  $f$  admet la courbe représentative  $\mathcal{C}'$  ci-dessous.



Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. La représentation graphique de la fonction  $f$  admet une tangente horizontale sur  $[-3; 0]$ .
2. La fonction  $f$  est croissante sur l'intervalle  $[-1; 2]$ .
3. Pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[-3; 2]$ ,  $f(x) \geq -1$ .
4. Soit  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $f$ .  
La tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 0 passe par le point de coordonnées  $(1; 0)$ .

TSVP  $\Rightarrow$

**EXERCICE 3** (5 points)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[-1; 1]$  par  $f(x) = x + \sqrt{1 - x^2}$ .

1. Démontrer que si  $x \in ]-1; 0]$ , alors  $f'(x) > 0$ .
2. Démontrer que pour  $x \in [0; 1[$ ,  $f'(x) = \frac{1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}(\sqrt{1 - x^2} + x)}$ .
3. En déduire le signe de  $f'(x)$  sur  $[0; 1[$ , puis donner le tableau de variations de  $f$  sur  $[-1; 1]$ .
4. Donner l'équation de la tangente  $\Delta$  à  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse 0.
5. Étudier la position relative de  $\mathcal{C}_f$  et  $\Delta$ .

**EXERCICE 4** (7 points)

**Partie A :**

Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = 4x^3 - 3x - 8$ .

1. Étudier le sens de variation de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet dans  $\mathbb{R}$  une unique solution que l'on note  $\alpha$ .  
Déterminer un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude  $10^{-2}$ .
3. Déterminer le signe de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Partie B :**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$  par  $f(x) = \frac{x^3 + 1}{4x^2 - 1}$ .

On note  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de  $f$ .

1. (a) Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .  
(b) Déterminer la limite de  $f$  en  $\frac{1}{2}$ .  
Que peut-on en déduire pour la courbe  $\mathcal{C}_f$  ?
2. (a) Calculer  $f'(x)$ .  
(b) En déduire le sens de variation de  $f$  sur  $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$
3. Démontrer que  $f(\alpha) = \frac{3}{8}\alpha$ .  
En déduire un encadrement de  $f(\alpha)$ .

### 3 Devoir n 3 Novembre 2017 2 heures

Terminale 10

Mercredi 15 Novembre 2017



#### INTERROGATION ÉCRITE N 3

##### EXERCICE 1 (4 points)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$ .

1. Justifier que  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et déterminer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
2. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
3. Calculer  $f'(x)$  et donner le tableau de variations de  $f$ .
4. Tracer  $\mathcal{C}_f$  courbe représentative de  $f$ .

##### EXERCICE 2 (6 points)

Soit  $f : x \mapsto 1 - \frac{2}{\cos x}$  et  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative.

1. Donner son domaine de définition.
2. Étudier la limite de  $f$  en  $\frac{\pi}{2}$ . Que peut-on en déduire pour  $\mathcal{C}_f$  ?
3. Montrer que  $f$  est périodique, et qu'elle est paire.
4. Étudier les variations de  $f$  sur  $]0; \pi]$  et donner son tableau de variations.
5. Tracer  $\mathcal{C}_f$  sur  $]0; \pi]$ .
6. Expliquer comment en déduire le tracé de  $\mathcal{C}_f$  sur  $\mathbb{R}$ . Effectuer ce tracé.

##### EXERCICE 3 (4 points)

Soit la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier  $n$  par : 
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n - 1 \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement sur l'axe des abscisses  $u_0$   $u_1$   $u_2$ .
2. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n > 2$ .
3. Démontrer que  $(u_n)$  est croissante.
4. On définit la suite  $(v_n)$  par  $v_n = u_n - 2$  pour tout entier naturel  $n$ .
  - (a) Quelle est la nature de la suite  $(v_n)$  ?
  - (b) Exprimer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$ .

##### EXERCICE 4 (6 points)

$f$  est une fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .  $f'$  est la fonction dérivée de la fonction  $f$ .

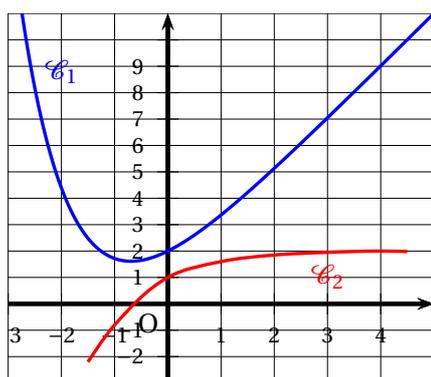
Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on nomme  $\mathcal{C}_1$  la courbe représentative de la fonction  $f$  et  $\mathcal{C}_2$  la courbe représentative de la fonction  $f'$ .

Le point A de coordonnées (0 ; 2) appartient à la courbe  $\mathcal{C}_1$ .

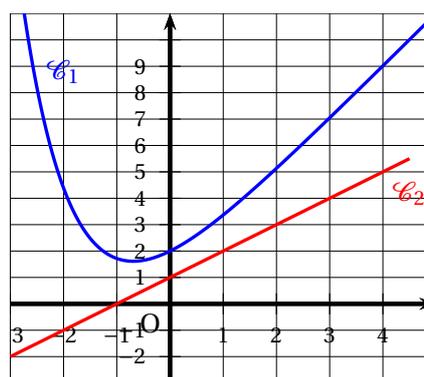
Le point B de coordonnées (0 ; 1) appartient à la courbe  $\mathcal{C}_2$ .

1. Dans les trois situations ci-dessous, on a dessiné la courbe représentative  $\mathcal{C}_1$  de la fonction  $f$ . Sur l'une d'entre elles, la courbe  $\mathcal{C}_2$  de la fonction dérivée  $f'$  est tracée convenablement. Expliquer pourquoi seule la situation 1 est acceptable

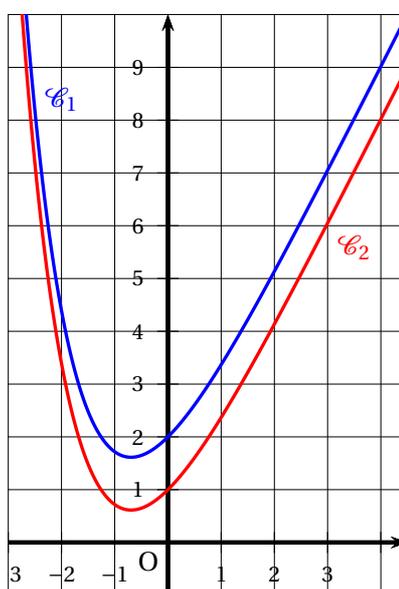
Situation 1



Situation 2 ( $\mathcal{C}_2$  est une droite)



Situation 3



2. Déterminer l'équation réduite de la droite  $\Delta$  tangente à la courbe  $\mathcal{C}_1$  en A.
3. On sait que pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = e^{-x} + ax + b$  où  $a$  et  $b$  sont deux nombres réels.
  - (a) Déterminer la valeur de  $b$  en utilisant les renseignements donnés par l'énoncé.
  - (b) Prouver que  $a = 2$ .
4. Étudier les variations de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
5. Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .
6. Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = f(x) - (x + 2)$ .
  - (a) Montrer que la fonction  $g$  admet 0 comme minimum sur  $\mathbb{R}$ .
  - (b) En déduire la position de la courbe  $\mathcal{C}_1$  par rapport à la droite  $\Delta$ .

## 4 Devoir n 4 Décembre 2017 2 heures

Terminale 10

Mercredi 6 Décembre 2017



### INTERROGATION ÉCRITE N 4

#### EXERCICE 1 (5 points)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 2,1e^x + 1,1x + 1,6.$$

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation :  $e^{2x} - 2,1e^x + 1,1 \geq 0$ .
2. Étudier les variations de la fonction  $f$ .
3. Dédire de cette étude le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = 0$ .

#### EXERCICE 2 (6 points)

##### Partie A :

Résoudre les équations suivantes pour  $x > 0$  :

1.  $3 \ln x^2 + 5 \ln x - 6 = 0$
2.  $(\ln x)^2 - 5 \ln x + 6 = 0$

##### Partie B :

Résoudre les inéquations suivantes :

1.  $\ln\left(\frac{2x-3}{x-2}\right) \leq 0$
2.  $\ln(x+1) + \ln(x+2) \leq \ln(12)$

##### Partie C :

Soit  $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ .

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
2. Démontrer que  $f$  est une fonction impaire.

#### EXERCICE 3 (10 points)

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par

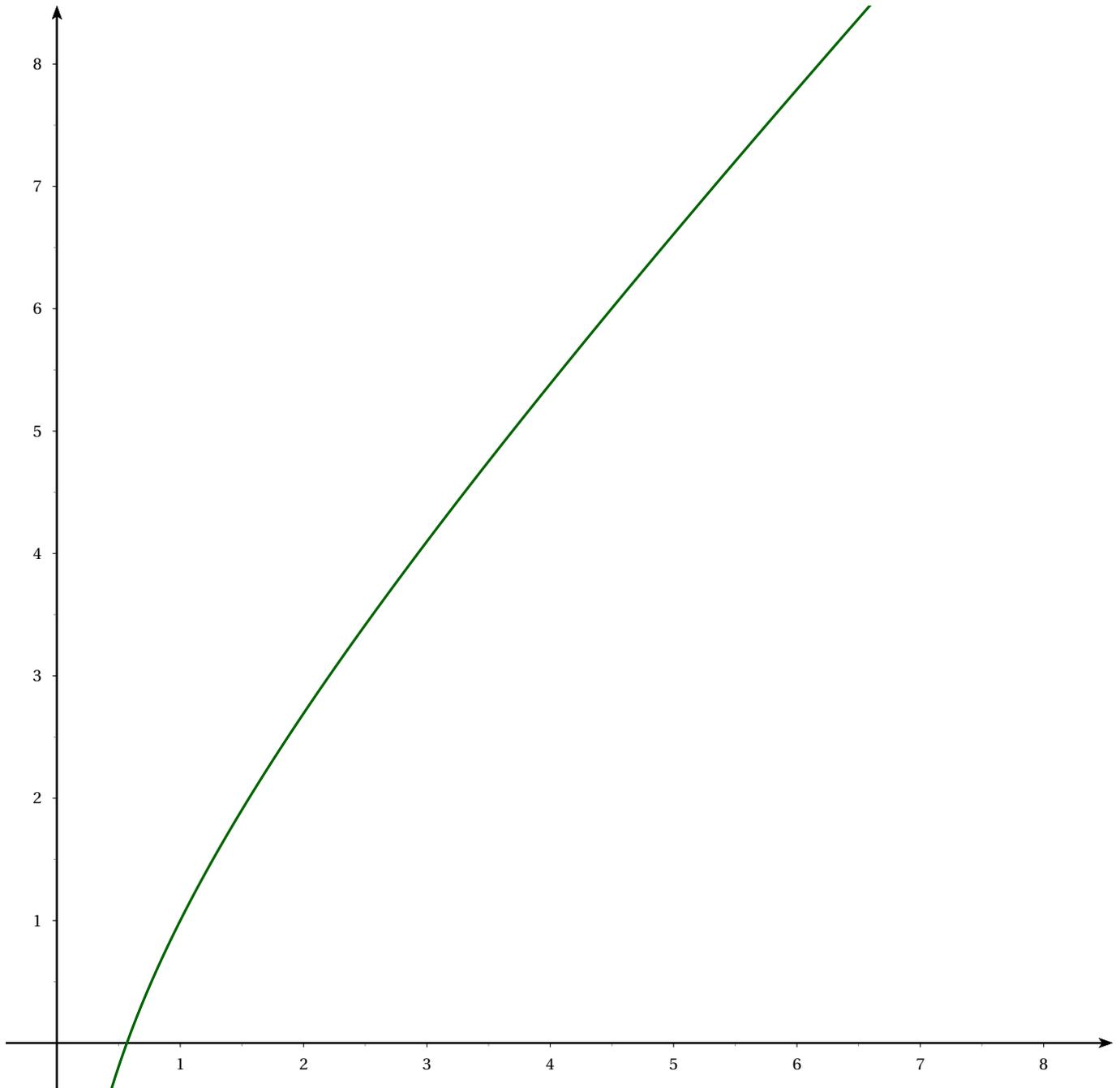
$$f(x) = x + \ln x.$$

On nomme  $\Gamma$  sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

1. (a) Déterminer les limites de la fonction  $f$  aux bornes de son intervalle de définition.  
(b) Montrer que la fonction  $f$  est strictement croissante sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .
2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ , l'équation  $f(x) = n$  admet une unique solution dans  $]0; +\infty[$ .  
On note  $\alpha_n$  cette solution. On a donc : pour tout entier naturel  $n$ ,  
 $\alpha_n + \ln \alpha_n = n$ .  
(b) Sur la page annexe, on a tracé  $\Gamma$ .  
Placer les nombres  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  et  $\alpha_5$  sur l'axe des abscisses en laissant apparents les traits de construction.  
(c) Préciser la valeur de  $\alpha_1$ .

- (d) Démontrer que la suite  $(\alpha_n)$  est strictement croissante.
3. (a) Déterminer une équation de la tangente  $\Delta$  à la courbe  $\Gamma$  au point A d'abscisse 1.
- (b) Étudier les variations de la fonction  $h$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $h(x) = \ln x - x + 1$ .  
En déduire la position de la courbe  $\Gamma$  par rapport à  $\Delta$ .
- (c) Tracer  $\Delta$  sur le graphique de la page annexe. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $\frac{n+1}{2} \leq \alpha_n$ .
4. Déterminer la limite de la suite  $(\alpha_n)$ .

Annexe :



## 5 Devoir n 5 Janvier 2018 3 heures

Terminale 10

Mercredi 17 Janvier 2018



### INTERROGATION ÉCRITE N 5

#### EXERCICE 1 (5 points)

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par

$$f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}.$$

On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé.

- Déterminer la limite en 0 de la fonction  $f$  et interpréter graphiquement le résultat.
- (a) Démontrer que, pour tout  $x$  appartenant à  $]0; +\infty[$ ,

$$f(x) = 4 \left( \frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \right)^2.$$

- (b) En déduire que l'axe des abscisses est une asymptote à la courbe représentative de la fonction  $f$  au voisinage de  $+\infty$ .
- On admet que  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et on note  $f'$  sa fonction dérivée.
  - Démontrer que, pour tout  $x$  appartenant à  $]0; +\infty[$ ,

$$f'(x) = \frac{\ln(x)(2 - \ln(x))}{x^2}.$$

- (b) Étudier le signe de  $f'(x)$  selon les valeurs du nombre réel  $x$  strictement positif.
- Donner le tableau de variations de  $f$  après avoir calculé  $f(1)$  et  $f(e^2)$ .
  - Démontrer que l'équation  $f(x) = 1$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $]0; +\infty[$  et donner un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude  $10^{-2}$ .

#### EXERCICE 2 (5 points)

- Donner la forme algébrique du quotient  $\frac{3-i}{1+2i}$ .
- Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $(1-i)z + 2i - 2\sqrt{3} = -2(1+i\sqrt{3})$ .  
Donner le résultat sous forme trigonométrique.
- Résoudre dans  $\mathbb{C}$   $3z^2 + z = -1$ .
- Résoudre dans  $\mathbb{C}$   $z^4 - 2z^2 - 15 = 0$
- On pose pour tout entier naturel  $n$   $z_n = i^n$ . Déterminer  $z_{1515}$ .

**EXERCICE 3** (5 points)

Soient  $A$  et  $B$  les points d'affixes respectives  $Z_A = 2 - i$  et  $Z_B = -2i$  dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . Soit  $M$  d'affixe  $z$ .

On appelle  $f$  l'application, qui, à tout nombre complexe  $z$  différent de  $-2i$ , associe :

$$Z = f(z) = \frac{z - 2 + i}{z + 2i}$$

1. En notant  $z = x + iy$   $x$  et  $y$  étant deux réels.
  - (a) Exprimer la partie réelle (notée  $X$ ) et la partie imaginaire (notée  $Y$ ) de  $Z$  en fonction de  $x$  et  $y$ .  
En déduire la nature de :
  - (b) L'ensemble  $\Delta$  des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $Z$  soit un réel.
  - (c) L'ensemble  $\Sigma$  des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $Z$  soit un imaginaire pur éventuellement nul.
  - (d) Représenter ces deux ensembles.
2. Calculer  $|f(z) - 1| \times |z + 2i|$ .  
En déduire que les points  $M'$  d'affixe  $Z$ , lorsque le point  $M$  d'affixe  $z$  parcourt le cercle de centre  $B$  et de rayon  $\sqrt{5}$ , sont tous sur un même cercle dont on précisera le rayon et l'affixe du centre.

**EXERCICE 4** (5 points)

On considère la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{x}{e^x - x}$

On note  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal d'unité graphique 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées.

**Partie A**

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = e^x - x - 1$ .

1. Étudier les variations de la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R}$  et en déduire le signe de  $g(x)$ .
2. Justifier que, pour tout réel  $x$ ,  $e^x - x > 0$ .

**Partie B**

1. (a) Calculer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .  
(b) Interpréter graphiquement les résultats précédents.
2. Étudier le sens de variation de  $f$ , puis dresser son tableau de variation.
3. (a) Déterminer l'équation réduite de la tangente  $T$  à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse 0.  
(b) À l'aide de la partie A, étudier la position de la courbe  $\mathcal{C}_f$  par rapport à la droite  $T$ .  
(c) Tracer la courbe  $\mathcal{C}_f$ , la droite  $T$  et les asymptotes.

## 6 Devoir n 6 Février 2018 3 heures

Terminale 10

Mercredi 7 Février 2018



### INTERROGATION ÉCRITE N 6

#### EXERCICE 1 (5 points)

##### Partie A : Restitution organisée des connaissances

On rappelle que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ . Démontrer que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ .

##### Partie B

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[1 ; +\infty[$  par  $f(x) = x - \frac{\ln(x)}{x}$ .

On note  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Soit  $g$  la fonction définie sur  $[1 ; +\infty[$  par  $g(x) = x^2 - 1 + \ln(x)$ .  
Montrer que la fonction  $g$  est positive sur  $[1 ; +\infty[$ .
2. (a) Montrer que, pour tout  $x$  de  $[1 ; +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ .  
(b) En déduire le sens de variation de  $f$  sur  $[1 ; +\infty[$ .  
(c) Étudier la position de la courbe  $\mathcal{C}$  par rapport à la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = x$ .
3. Pour tout entier naturel  $k$  supérieur ou égal à 2, on note respectivement  $M_k$  et  $N_k$  les points d'abscisse  $k$  de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$ .  
Montrer que, pour tout entier naturel  $k$  supérieur ou égal à 2, la distance  $M_k N_k$  entre les points  $M_k$  et  $N_k$  est donnée par  $M_k N_k = \frac{\ln(k)}{k}$ .

#### EXERCICE 2 (5 points)

Avant le début des travaux de construction d'une autoroute, une équipe d'archéologie préventive procède à des sondages successifs en des points régulièrement espacés sur le terrain.

Lorsque le  $n$ -ième sondage donne lieu à la découverte de vestiges, il est dit positif.

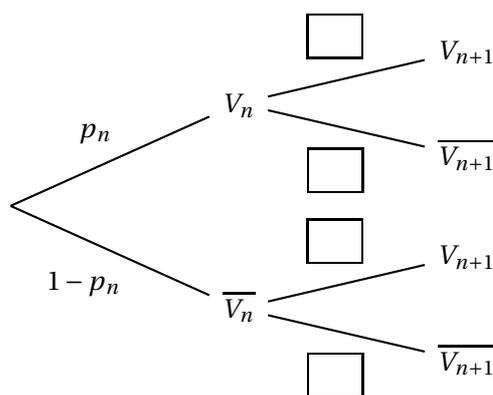
L'évènement : « le  $n$ -ième sondage est positif » est noté  $V_n$ , on note  $p_n$  la probabilité de l'évènement  $V_n$ .

L'expérience acquise au cours de ce type d'investigation permet de prévoir que :

- si un sondage est positif, le suivant a une probabilité égale à 0,6 d'être aussi positif;
- si un sondage est négatif, le suivant a une probabilité égale à 0,9 d'être aussi négatif.

On suppose que le premier sondage est positif, c'est-à-dire :  $p_1 = 1$ .

1. Calculer les probabilités des évènements suivants :
  - (a)  $A$  : « les 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> sondages sont positifs »;
  - (b)  $B$  : « les 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> sondages sont négatifs ».
2. Calculer la probabilité  $p_3$  pour que le 3<sup>e</sup> sondage soit positif.
3.  $n$  désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.  
Recopier et compléter l'arbre ci-dessous en fonction des données de l'énoncé :



4. Pour tout entier naturel  $n$  non nul, établir que :  $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,1$ .
5. On note  $u$  la suite définie, pour tout entier naturel  $n$  non nul par :  $u_n = p_n - 0,2$ .
  - (a) Démontrer que  $u$  est une suite géométrique, en préciser le premier terme et la raison.
  - (b) Exprimer  $p_n$  en fonction de  $n$ .
  - (c) Calculer la limite, quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , de la probabilité  $p_n$ .

**EXERCICE 3** (5 points)

On considère l'application  $f$  qui à tout complexe  $z$  différent de  $-2i$  associe le complexe  $f(z) = \frac{z-i}{z+2i}$ .

1. Calculer les images par  $f$  des deux complexes  $-i$  et  $2$
2. Calculer (s'ils existent) les antécédents par  $f$  des deux complexes  $1$  et  $\frac{1-i}{2}$
3. Existe-t-il un complexe  $z$  qui soit réel et tel que  $f(z)$  soit imaginaire pur ?
4. Démontrer que si  $z$  est un imaginaire pur différent de  $-2i$  alors  $f(z)$  est réel.
5. On pose  $z = x + iy$ .
  - (a) Exprimer les parties réelles et imaginaires de  $f(z)$  en fonction de  $x$  et  $y$ .
  - (b) Quel est l'ensemble des complexes  $z$  tels que  $f(z)$  soit un imaginaire pur ?
  - (c) Quel est l'ensemble des complexes  $z$  tels que  $f(z)$  soit un réel ?
  - (d) La réciproque de la question 4. est-elle vraie ?

**EXERCICE 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité** (5 points)

On considère la suite de nombres complexes  $(z_n)$  définie par  $z_0 = \sqrt{3} - i$  et pour tout entier naturel  $n$  :

$$z_{n+1} = (1+i)z_n.$$

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

**Partie A**

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $u_n = |z_n|$ .

1. Calculer  $u_0$ .
2. Démontrer que  $(u_n)$  est la suite géométrique de raison  $\sqrt{2}$  et de premier terme  $2$ .
3. Pour tout entier naturel  $n$ , exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .
4. Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .
5. Étant donné un réel positif  $p$ , on souhaite déterminer, à l'aide d'un algorithme, la plus petite valeur de l'entier naturel  $n$  telle que  $u_n > p$ .  
Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions de traitement et de sortie, de façon à afficher la valeur cherchée de l'entier  $n$ .

<b>Variables</b>	: $u$ est un réel $p$ est un réel $n$ est un entier
<b>Initialisation</b>	: Affecter à $n$ la valeur 0 Affecter à $u$ la valeur 2
<b>Entrée</b>	: Demander la valeur de $p$
<b>Traitement</b>	:
<b>Sortie</b>	:

### Partie B

- Déterminer la forme algébrique de  $z_1$ .
- Déterminer la forme exponentielle de  $z_0$  et de  $1 + i$ .  
En déduire la forme exponentielle de  $z_1$ .
- Déduire des questions précédentes la valeur exacte de  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ .\*

### EXERCICE 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité (5 points)

Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 4$ ,  $u_1 = 2$  et, pour tout  $n$  supérieur ou égal à 0 :

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n.$$

- Calculer  $u_2$  et  $u_3$ .
- Pour tout entier naturel  $n \geq 2$ , on souhaite calculer  $u_n$  à l'aide de l'algorithme suivant :

<b>Variabes :</b>	$a, b$ et $c$ sont des nombres réels $i$ et $n$ sont des nombres entiers naturels supérieurs ou égaux à 2			
<b>Initialisation :</b>	$a$ prend la valeur 4 $b$ prend la valeur 2			
<b>Traitement :</b>	Saisir $n$ Pour $i$ variant de 2 à $n$ <table style="margin-left: 40px; border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black;"> <tr><td><math>c \leftarrow a</math></td></tr> <tr><td><math>a \leftarrow b</math></td></tr> <tr><td><math>b \leftarrow \dots</math></td></tr> </table> Fin Pour	$c \leftarrow a$	$a \leftarrow b$	$b \leftarrow \dots$
$c \leftarrow a$				
$a \leftarrow b$				
$b \leftarrow \dots$				
<b>Sortie :</b>	Afficher $b$			

- (a) Recopier la ligne de cet algorithme comportant des pointillés et les compléter.

On obtient avec cet algorithme le tableau de valeurs suivant :

$n$	7	8	9	10	11	12
$u_n$	-11842	-36806	-112978	-344054	-1042402	-3147686

- (b) Quelle conjecture peut-on admettre concernant la monotonie de la suite  $(u_n)$  ?

- Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $C_n$  la matrice colonne  $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ .

On note  $A$  la matrice carrée d'ordre 2 telle que, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$C_{n+1} = AC_n.$$

Déterminer  $A$  et prouver que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $C_n = A^n C_0$ .

- Démontrer que, pour tout entier naturel non nul  $n$ ,

$$A^n = \begin{pmatrix} -2^{n+1} + 3^{n+1} & 3 \times 2^{n+1} - 2 \times 3^{n+1} \\ -2^n + 3^n & 3 \times 2^n - 2 \times 3^n \end{pmatrix}.$$

En déduire une expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .  
La suite  $(u_n)$  a-t-elle une limite ?

**7 Devoir n 7 Bac Blanc Mars 2018 4 heures**

**Baccalauréat blanc 2017-2018  
Lycée Janson de Sailly  
Epreuve de Mathématiques Série S  
durée : 4 heures**

*L'usage de la calculatrice est autorisé en mode examen uniquement*

*Le numéro de la classe devra figurer dans la partie anonymée.*

*Indiquez en tête de la copie si vous avez ou non suivi l'enseignement de spécialité mathématiques.*

**EXERCICE 1** (4 points)

Dans le plan complexe, on associe à tout point  $M$  d'affixe  $z$ , le point  $M'$  d'affixe  $z'$  tel que  $z' = z^2 - z + 5$ . Le point  $M'$  est alors appelé image de  $M$ . On réalisera une figure en prenant 2cm comme unité.

1. Soit  $E$  le point d'affixe  $\frac{1}{2}(1 + i)$ .
  - (a) Montrer que son image  $E'$  a pour affixe  $\frac{9}{2}$ . Placer  $E$  et  $E'$ .
  - (b) Calculer la distance  $OE$ .
  
2. Résoudre l'équation  $z' = 3z$ . On appelle  $F$  et  $G$  les points dont les affixes sont les solutions de cette équation.  
Placer  $F$  et  $G$ .
  
3. Soit  $A$  le point d'affixe 1. Déterminer les affixes des points  $M$  tels que  $OMAM'$  est un parallélogramme.  
On appelle  $M_1$  et  $M_2$  les points solutions. Placer  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M'_1$  et  $M'_2$ .
  
4. On pose  $z = x + iy$  où  $x$  et  $y$  sont des réels. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de  $z'$  et en déduire l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  pour lesquels  $z'$  est réel. Représenter cet ensemble.

**EXERCICE 2** (4 points)

Une épreuve consiste à lancer une fléchette sur une cible partagée en trois cases notées 1, 2, 3. Deux concurrents A et B sont en présence. On admet qu'à chaque lancer, chacun d'eux atteint une case et une seule case et que les lancers sont indépendants.

Pour le concurrent A, les probabilités d'atteindre les cases 1, 2, 3 sont dans cet ordre :  $\frac{1}{12}, \frac{1}{3}, \frac{7}{12}$ .

Pour le concurrent B, les trois éventualités sont équiprobables.

Les trois parties sont indépendantes.

Partie 1 : Le concurrent A lance la fléchette trois fois. Les résultats des trois lancers sont indépendants. Quelle est la probabilité pour qu'il ait atteint trois fois la même case. Donner le résultat à  $10^{-3}$  près.

Partie 2 : On choisit un des deux concurrents. La probabilité de choisir A est égale à deux fois la probabilité de choisir B.

N. B. : Les résultats demandés seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. Construire un arbre pondéré illustrant cette situation.
2. Un seul lancer est effectué. Quelle est la probabilité pour que la case 3 soit atteinte ?
3. Un seul lancer a été effectué, et la case 3 a été atteinte. Quelle est la probabilité pour que ce soit le concurrent A qui ait lancé la fléchette ?

Partie 3 : Le concurrent A lance la fléchette cinq fois. Les résultats des cinq lancers sont indépendants.

Les résultats demandés seront donnés à  $10^{-3}$  près.

1. Quelle est la probabilité pour qu'il atteigne chaque fois la case 3 ?
2. Quelle est la probabilité qu'il atteigne exactement deux fois la case 3 ?

**EXERCICE 3** (7 points)

Partie A

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0, 1[$  par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 2x.$$

1. Déterminer la limite de  $f(x)$  en 1.
2. Montrer que  $f'(x) = \frac{2x^2}{1-x^2}$ . Étudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variation.
3. Montrer que pour tout  $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ ,  $f(x) \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ .

Partie B

On pose  $g(x) = f(x) - \frac{2}{3}x$  pour tout  $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ .

1. Étudier les variations de  $g$ .
2. En déduire le signe de  $g(x)$ , puis que  $f(x) \leq \frac{2}{3}x$  pour tout  $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ .

Partie C

La suite  $(u_n)$  est définie par  $u_0 = \frac{1}{2}$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

1. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a  $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$ .
2. En utilisant la question B2, montrer que pour tout entier  $n$ , on a  $u_{n+1} \leq \frac{2}{3}u_n$ .
3. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ .
4. En déduire la limite de  $(u_n)$ .
5. Compléter l'algorithme suivant afin qu'il affiche le plus petit entier  $n$  tel que  $u_n \leq 10^{-4}$ .

<b>Variables :</b>	$U$ est un nombre réel $N$ est un nombre entier naturel
<b>Initialisation :</b>	$U \leftarrow \frac{1}{2}$ $N \leftarrow 0$
<b>Traitement :</b>	Tant que...   $U \leftarrow \dots$   ... Fin Tant que
<b>Sortie :</b>	Afficher ...

**EXERCICE 4** (5 points) Pour les candidats ayant suivi la spécialité mathématiques

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et justifier la réponse. Il est attribué 1 point par réponse exacte correctement justifiée. L'absence de réponse n'est pas pénalisée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

1. Affirmation 1 : L'équation  $x^2 - x \equiv 8 \pmod{5}$  n'a pas de solution dans l'ensemble des entiers.
2. Affirmation 2 : Pour tout entier naturel  $n$ ,  $3^{2n+1} + 2^{n+2}$  est divisible par 7.
3. Affirmation 3 :  $p$  étant un nombre premier différent de 2, il y a un seul couple d'entiers naturels  $(m, n)$  tel que  $m^2 - n^2 = p$ .
4. Affirmation 4 : 1 est le reste dans la division euclidienne de  $(2018^{2018})^{2018}$  par 9.
5. Un mobile est en mouvement dans le plan rapporté au repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . A chaque étape il passe du point de coordonnées  $(x, y)$  au point de coordonnées  $(x', y')$  définies par  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

On sait que sa position initiale est en  $(1, 0)$ .

Affirmation 5 : Au bout de la quatrième étape, le mobile revient sur l'axe des abscisses.

**EXERCICE 4** (5 points) Pour les candidats n'ayant pas suivi la spécialité mathématiques

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et justifier la réponse. Il est attribué 1 point par réponse exacte correctement justifiée. L'absence de réponse n'est pas pénalisée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

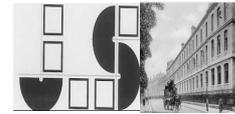
Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^{2x} - e^x + x$ .

1. Affirmation 1 :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .
2. Affirmation 2 : L'équation  $f(x) = 10$  a une seule solution dans  $\mathbb{R}$ .
3. Affirmation 3 : La tangente à la courbe de  $f$  au point d'abscisse  $\frac{1}{2}$  passe par le point de coordonnées  $\left(0; -\frac{\sqrt{e}}{2}\right)$ .
4. Affirmation 4 : La courbe de  $f$  admet deux tangentes parallèles à la droite d'équation  $y = 2x + 1$ .
5. Affirmation 5 :  $f(-\ln 2) = -\frac{1}{4} - \ln 2$ .

## 8 Devoir n 8 Mars 2018 3 heures

Terminale 10

Mercredi 28 Mars 2018



### INTERROGATION ÉCRITE N 8

#### EXERCICE 1 (5 points)

Soient les deux nombres complexes :

$$z_1 = 1 - i \quad \text{et} \quad z_2 = -8 - 8\sqrt{3}i.$$

On pose :

$$Z = \frac{z_1}{z_2}.$$

1. Donner la forme algébrique de  $Z$ .
2. Écrire  $z_1$  et  $z_2$  sous forme exponentielle.
3. Écrire  $Z$  sous forme exponentielle puis sous forme trigonométrique.
4. En déduire que  $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ .
5. On admet que :
  - $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ .
  - pour tous réels  $a$  et  $b$ ,  $\cos a \cos b - \sin a \sin b = \cos(a + b)$ .

Résoudre l'équation suivante dans l'ensemble des réels  $\mathbb{R}$  :

$$(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \cos x - (\sqrt{6} + \sqrt{2}) \sin x = -2\sqrt{3}.$$

#### EXERCICE 2 (6 points)

Soit  $\mathbb{R}$  l'ensemble des nombres réels.

##### Partie A

Soit  $g$  la fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que, pour tout réel  $x$ ,

$$g(x) = -2x^3 + x^2 - 1.$$

1. (a) Étudier les variations de la fonction  $g$ .  
(b) Déterminer les limites de la fonction  $g$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .
2. Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution dans  $\mathbb{R}$ , notée  $\alpha$ , et que  $\alpha$  appartient à  $[-1; 0]$ .
3. En déduire le signe de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .

##### Partie B

Soit  $f$  la fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que, pour tout réel  $x$ ,

$$f(x) = (1 + x + x^2 + x^3) e^{-2x+1}.$$

On note  $f'$  la fonction dérivée de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

- Démontrer que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .
- (a) Démontrer que, pour tout  $x > 1$ ,

$$1 < x < x^2 < x^3.$$

- (b) En déduire que, pour  $x > 1$ ,

$$0 < f(x) < 4x^3 e^{-2x+1}.$$

- (c) On admet que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0$ .

Vérifier que, pour tout réel  $x$ ,  $4x^3 e^{-2x+1} = \frac{e}{2} (2x)^3 e^{-2x}$  puis montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 4x^3 e^{-2x+1} = 0.$$

- (d) On note  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

En utilisant la question précédente, déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$  et en donner une interprétation graphique.

- Démontrer que, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $f'(x) = (-2x^3 + x^2 - 1) e^{-2x+1}$ .
- À l'aide des résultats de la partie A, déterminer les variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

### **EXERCICE 3** (5 points)

Pour chacune des affirmations proposées, indiquer si elle est VRAIE ou FAUSSE et justifier cette réponse.

Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

- Soit la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par

$$\begin{cases} u_0 & = & 14 \\ u_{n+1} & = & 2u_n - 5. \end{cases}$$

Soit la suite  $(t_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par

$$t_n = u_n - 5.$$

**Affirmation A :** La suite  $(t_n)$  est une suite géométrique.

**Affirmation B :** Pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_n = 9 \times 2^n + 5.$$

- Soit une suite  $(v_n)$ .

**Affirmation C :** Si, pour tout entier naturel  $n$  supérieur à 1,

$$-1 - \frac{1}{n} \leq v_n \leq 1 + \frac{1}{n}$$

alors la suite  $(v_n)$  converge.

- Affirmation D :** Pour tout entier naturel  $n$  non nul,

$$(8 \times 1 + 3) + (8 \times 2 + 3) + \dots + (8 \times n + 3) = n(4n + 7).$$

- Soit  $(w_n)$  une suite convergente.

**Affirmation E :** Si, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite  $(w_n)$  sont strictement positifs, alors la limite de la suite  $(w_n)$  est aussi strictement positive.

**EXERCICE 4** (4 points)

On considère la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par :

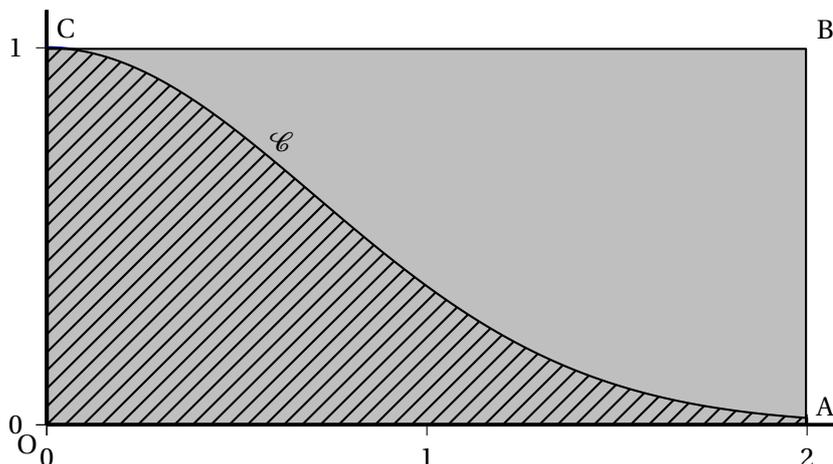
$$u_n = \int_0^n e^{-x^2} dx.$$

On ne cherchera pas à calculer  $u_n$  en fonction de  $n$ .

1. (a) Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.  
(b) Démontrer que pour tout réel  $x \geq 0$ , on a :  $-x^2 \leq -2x + 1$ , puis :  
 $e^{-x^2} \leq e^{-2x+1}$ .  
En déduire que pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_n < \frac{e}{2}$ .  
(c) Démontrer que la suite  $(u_n)$  est convergente. On ne cherchera pas à calculer sa limite.
2. Dans cette question, on se propose d'obtenir une valeur approchée de  $u_2$ .

Dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  ci-dessous, on a tracé la courbe  $\mathcal{C}_f$  représentative de la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0; 2]$  par  $f(x) = e^{-x^2}$ , et le rectangle OABC où A(2; 0), B(2; 1) et C(0; 1).

On a hachuré le domaine  $\mathcal{D}$  compris entre la courbe  $\mathcal{C}_f$ , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation  $x = 2$ .



On considère l'expérience aléatoire consistant à choisir un point  $M$  au hasard à l'intérieur du rectangle OABC.

On admet que la probabilité  $p$  que ce point appartienne au domaine est :  $p = \frac{\text{aire de } \mathcal{D}}{\text{aire de OABC}}$ .

- (a) Justifier que  $u_2 = 2p$ .
- (b) On considère l'algorithme suivant :

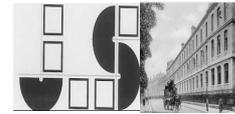
L1	<b>Variables :</b> $N, C$ nombres entiers; $X, Y, F$ nombres réels
L2	<b>Entrée :</b> Saisir $N$
L3	<b>Initialisation :</b> $C$ prend la valeur 0
L4	<b>Traitement :</b>
L5	Pour $k$ variant de 1 à $N$
L6	$X$ prend la valeur d'un nombre aléatoire entre 0 et 2
L7	$Y$ prend la valeur d'un nombre aléatoire entre 0 et 1
L8	Si $Y \leq e^{-x^2}$ alors
L9	$C$ prend la valeur $C + 1$
L10	Fin si
L11	Fin pour
L12	Afficher $C$
L13	$F$ prend la valeur $C/N$
L14	Afficher $F$

- i. Que permet de tester la condition de la ligne L8 concernant la position du point  $M(X; Y)$  ?
  - ii. Interpréter la valeur  $F$  affichée par cet algorithme.
  - iii. Que peut-on conjecturer sur la valeur de  $F$  lorsque  $N$  devient très grand ?
- (c) En faisant fonctionner cet algorithme pour  $N = 10^6$ , on obtient  $C = 441\,138$ .  
On admet dans ce cas que la valeur  $F$  affichée par l'algorithme est une valeur approchée de la probabilité  $p$  à  $10^{-3}$  près.  
En déduire une valeur approchée de  $u_2$  à  $10^{-2}$  près.

## 9 Devoir n 9 Mai 2018 2 heures

Terminale 10

Mercredi 9 Mai 2018



### INTERROGATION ÉCRITE N 9

#### EXERCICE 1 (5 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère :

- les points  $A(0 ; 1 ; -1)$  et  $B(-2 ; 2 ; -1)$ .
- la droite  $\mathcal{D}$  de représentation paramétrique 
$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 + t \\ z = -1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).
2. (a) Montrer que les droites (AB) et  $\mathcal{D}$  ne sont pas parallèles.  
(b) Montrer que les droites (AB) et  $\mathcal{D}$  ne sont pas sécantes.

Dans la suite la lettre  $u$  désigne un nombre réel.

On considère le point  $M$  de la droite  $\mathcal{D}$  de coordonnées  $(-2 + u ; 1 + u ; -1 - u)$ .

3. Vérifier que le plan  $\mathcal{P}$  d'équation  $x + y - z - 3u = 0$  est orthogonal à la droite  $\mathcal{D}$  et passe par le point  $M$ .
4. Montrer que le plan  $\mathcal{P}$  et la droite (AB) sont sécants en un point  $N$  de coordonnées  $(-4 + 6u ; 3 - 3u ; -1)$ .
5. (a) Montrer que la droite (MN) est perpendiculaire à la droite  $\mathcal{D}$ .  
(b) Existe-t-il une valeur du nombre réel  $u$  pour laquelle la droite (MN) est perpendiculaire à la droite (AB) ?

#### EXERCICE 2 (7 points)

##### Partie A

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = x - \ln(x^2 + 1).$$

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $f(x) = x$ .
2. Justifier tous les éléments du tableau de variations ci-dessous à l'exception de la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$  que l'on admet.

$x$	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	$-\infty$		$+\infty$

A graph of the function f(x) is shown within the table's grid. A diagonal arrow points from the bottom-left corner (labeled -infinity) to the top-right corner (labeled +infinity), indicating that the function is strictly increasing over the entire real line.

3. Montrer que, pour tout réel  $x$  appartenant à  $[0 ; 1]$ ,  $f(x)$  appartient à  $[0 ; 1]$ .
4. On considère l'algorithme suivant :

Variables	$N$ et $A$ des entiers naturels ;
Entrée	Saisir la valeur de $A$
Traitement	$N$ prend la valeur 0 Tant que $N - \ln(N^2 + 1) < A$ $N$ prend la valeur $N + 1$ Fin tant que
Sortie	Afficher $N$

- (a) Que fait cet algorithme ?  
(b) Déterminer la valeur  $N$  fournie par l'algorithme lorsque la valeur saisie pour  $A$  est 100.

### Partie B

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 1$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n^2 + 1)$ .

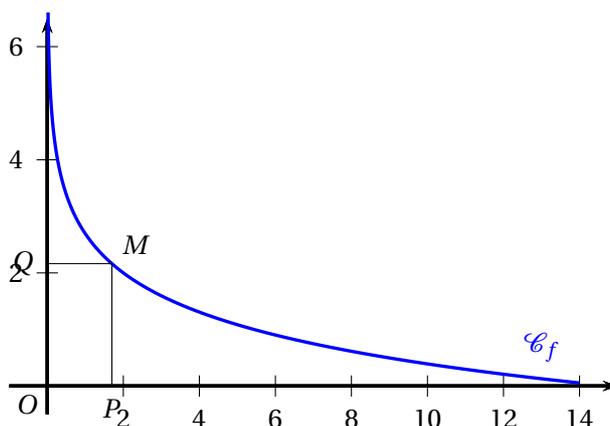
1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n$  appartient à  $[0; 1]$ .
2. Étudier les variations de la suite  $(u_n)$ .
3. Montrer que la suite  $(u_n)$  est convergente.
4. On note  $\ell$  sa limite, et on admet que  $\ell$  vérifie l'égalité  $f(\ell) = \ell$ .  
En déduire la valeur de  $\ell$ .

### EXERCICE 3 (3 points)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; 14]$  par

$$f(x) = 2 - \ln\left(\frac{x}{2}\right).$$

La courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  de la fonction  $f$  est donnée dans le repère orthogonal d'origine  $O$  ci-dessous :

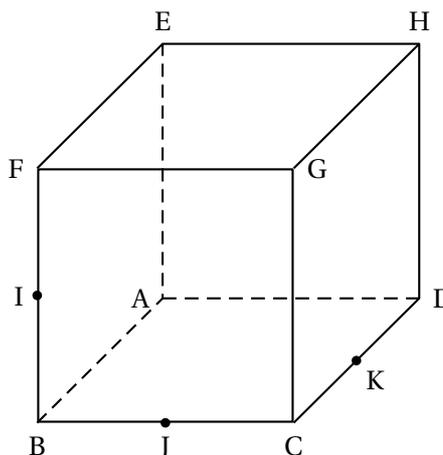


À tout point  $M$  appartenant à  $\mathcal{C}_f$  on associe le point  $P$  projeté orthogonal de  $M$  sur l'axe des abscisses, et le point  $Q$  projeté orthogonal de  $M$  sur l'axe des ordonnées.

- L'aire du rectangle  $OPMQ$  est-elle constante quelle que soit la position du point  $M$  sur  $\mathcal{C}_f$  ?
- L'aire du rectangle  $OPMQ$  peut-elle être maximale ?  
Si oui, préciser les coordonnées du point  $M$  correspondant.  
Justifier les réponses.

**EXERCICE 4 non spécialiste** (5 points)

ABCDEFGH désigne un cube de côté 1.  
Le point I est le milieu du segment [BF].  
Le point J est le milieu du segment [BC].  
Le point K est le milieu du segment [CD].



**Partie A**

**Dans cette partie, on ne demande aucune justification**

On admet que les droites (IJ) et (CG) sont sécantes en un point L.

Construire, sur la figure fournie en annexe et en laissant apparents les traits de construction :

- le point L;
- l'intersection  $\mathcal{D}$  des plans (IJK) et (CDH);
- la section du cube par le plan (IJK).

**Partie B**

L'espace est rapporté au repère  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ .

1. Donner les coordonnées de A, G, I, J et K dans ce repère.
2. (a) Montrer que le vecteur  $\overrightarrow{AG}$  est normal au plan (IJK).  
(b) En déduire une équation cartésienne du plan (IJK).
3. On désigne par M un point du segment [AG] et t le réel de l'intervalle [0; 1] tel que  $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AG}$ .  
(a) Démontrer que  $MI^2 = 3t^2 - 3t + \frac{5}{4}$ .  
(b) Démontrer que la distance MI est minimale pour le point  $N\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ .

**EXERCICE 4 pour les spécialistes** (5 points)

**Partie A**

On considère l'équation (E) :  $15x - 26k = m$  où x et k désignent des nombres entiers relatifs et m est un paramètre entier non nul.

1. Justifier, en énonçant un théorème, qu'il existe un couple d'entiers relatifs (u ; v) tel que  $15u - 26v = 1$ .  
Trouver un tel couple.
2. En déduire une solution particulière  $(x_0; k_0)$  de l'équation (E).
3. Montrer que  $(x; k)$  est solution de l'équation (E) si et seulement si  $15(x - x_0) - 26(k - k_0) = 0$ .

4. Montrer que les solutions de l'équation (E) sont exactement les couples  $(x ; k)$  d'entiers relatifs tels que :

$$\begin{cases} x = 26q + 7m \\ k = 15q + 4m \end{cases} \text{ où } q \in \mathbb{Z}.$$

### Partie B

On fait correspondre à chaque lettre de l'alphabet un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un système de codage :

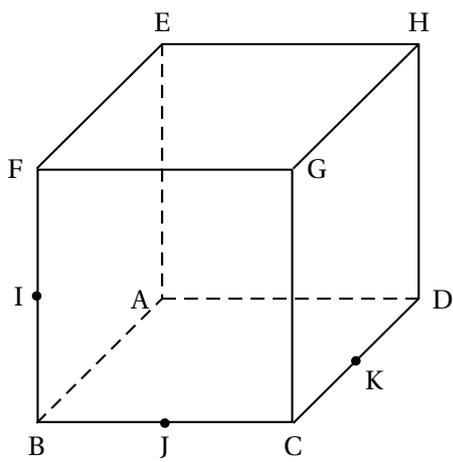
- à chaque lettre de l'alphabet, on associe l'entier  $x$  correspondant,
- on associe ensuite à  $x$  l'entier  $y$  qui est le reste de la division euclidienne de  $15x + 7$  par 26,
- on associe à  $y$  la lettre correspondante.

Ainsi, par cette méthode, la lettre E est associée à 4, 4 est transformé en 15 et 15 correspond à la lettre P et donc la lettre E est codée par la lettre P.

1. Coder le mot **MATHS**.
2. Soit  $x$  le nombre associé à une lettre de l'alphabet à l'aide du tableau initial et  $y$  le reste de la division euclidienne de  $15x + 7$  par 26.
  - (a) Montrer alors qu'il existe un entier relatif  $k$  tel que  $15x - 26k = y - 7$ .
  - (b) En déduire que  $x \equiv 7y + 3 \pmod{26}$ .
  - (c) En déduire une description du système de décodage associé au système de codage considéré.
3. Expliquer pourquoi la lettre W dans un message codé sera décodée par la lettre B.  
Décoder le mot WHL.

Annexe :

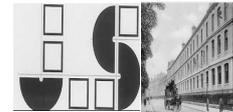
**EXERCICE 4 non spé**



# 10 Devoir n 10 Mai 2018 4 heures

Terminale 10

Samedi 26 Mai 2018



## INTERROGATION ÉCRITE N 10

### EXERCICE 1 (5 points)

#### Partie A

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on désigne par  $\mathcal{C}_1$  la courbe représentative de la fonction  $f_1$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f_1(x) = x + e^{-x}.$$

1. Justifier que  $\mathcal{C}_1$  passe par le point A de coordonnées (0 ; 1).
2. Déterminer le tableau de variation de la fonction  $f_1$ . On précisera les limites de  $f_1$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

#### Partie B

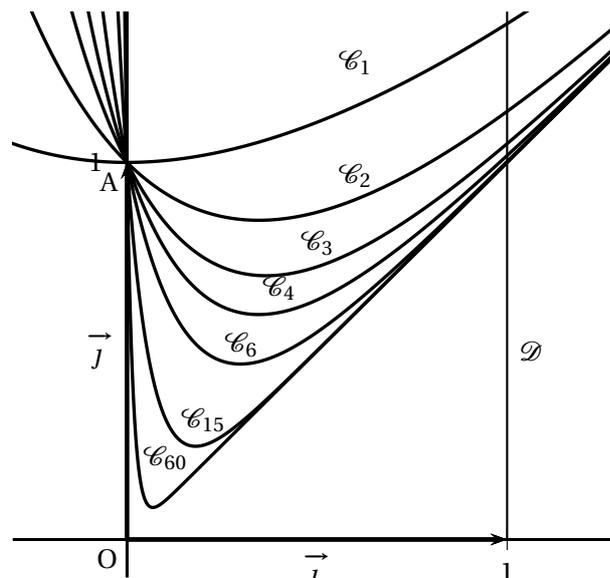
L'objet de cette partie est d'étudier la suite  $(I_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :

$$I_n = \int_0^1 (x + e^{-nx}) dx.$$

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , pour tout entier naturel  $n$ , on note  $\mathcal{C}_n$  la courbe représentative de la fonction  $f_n$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f_n(x) = x + e^{-nx}.$$

Sur le graphique ci-dessous on a tracé la courbe  $\mathcal{C}_n$  pour plusieurs valeurs de l'entier  $n$  et la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $x = 1$ .



- (a) Interpréter géométriquement l'intégrale  $I_n$ .

(b) En utilisant cette interprétation, formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite  $(I_n)$  et sa limite éventuelle. On précisera les éléments sur lesquels on s'appuie pour conjecturer.

2. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 1,

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 e^{-(n+1)x} (1 - e^x) dx.$$

En déduire le signe de  $I_{n+1} - I_n$  puis démontrer que la suite  $(I_n)$  est convergente.

3. Déterminer l'expression de  $I_n$  en fonction de  $n$  et déterminer la limite de la suite  $(I_n)$ .

### **EXERCICE 2** (5 points)

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

#### **Partie A**

Un laboratoire pharmaceutique propose des tests de dépistage de diverses maladies. Son service de communication met en avant les caractéristiques suivantes :

- la probabilité qu'une personne malade présente un test positif est 0,99 ;
- la probabilité qu'une personne saine présente un test positif est 0,001.

1. Pour une maladie qui vient d'apparaître, le laboratoire élabore un nouveau test. Une étude statistique permet d'estimer que le pourcentage de personnes malades parmi la population d'une métropole est égal à 0,1 %. On choisit au hasard une personne dans cette population et on lui fait subir le test.

On note  $M$  l'évènement « la personne choisie est malade » et  $T$  l'évènement « le test est positif ».

(a) Traduire l'énoncé sous la forme d'un arbre pondéré.

(b) Démontrer que la probabilité  $p(T)$  de l'évènement  $T$  est égale à  $1,989 \times 10^{-3}$ .

(c) L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse.

Affirmation : « Si le test est positif, il y a moins d'une chance sur deux que la personne soit malade ».

2. Le laboratoire décide de commercialiser un test dès lors que la probabilité qu'une personne testée positivement soit malade est supérieure ou égale à 0,95. On désigne par  $x$  la proportion de personnes atteintes d'une certaine maladie dans la population.

À partir de quelle valeur de  $x$  le laboratoire commercialise-t-il le test correspondant ?

#### **Partie B**

La chaîne de production du laboratoire fabrique, en très grande quantité, le comprimé d'un médicament.

1. Un comprimé est conforme si sa masse est comprise entre 890 et 920 mg. On admet que la masse en milligrammes d'un comprimé pris au hasard dans la production peut être modélisée par une variable aléatoire  $X$  qui suit la loi normale  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , de moyenne  $\mu = 900$  et d'écart-type  $\sigma = 7$ .

(a) Calculer la probabilité qu'un comprimé prélevé au hasard soit conforme. On arrondira à  $10^{-2}$ .

(b) Déterminer l'entier positif  $h$  tel que  $P(900 - h \leq X \leq 900 + h) \approx 0,99$  à  $10^{-3}$  près.

2. La chaîne de production a été réglée dans le but d'obtenir au moins 97 % de comprimés conformes. Afin d'évaluer l'efficacité des réglages, on effectue un contrôle en prélevant un échantillon de 1 000 comprimés dans la production. La taille de la production est supposée suffisamment grande pour que ce prélèvement puisse être assimilé à 1 000 tirages successifs avec remise. Le contrôle effectué a permis de dénombrer 53 comprimés non conformes sur l'échantillon prélevé.
- Ce contrôle remet-il en question les réglages faits par le laboratoire ? On pourra utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

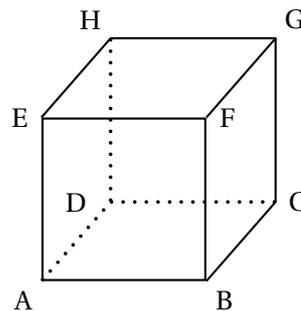
**EXERCICE 3** (5 points)

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.

Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

- Proposition 1 :** Dans le plan muni d'un repère orthonormé, l'ensemble des points  $M$  dont l'affixe  $z$  vérifie l'égalité  $|z - i| = |z + 1|$  est une droite.
- Proposition 2 :** Le nombre complexe  $(1 + i\sqrt{3})^4$  est un nombre réel.
- Soit ABCDEFGH un cube.

**Proposition 3 :** Les droites (EC) et (BG) sont orthogonales.



- L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Soit le plan  $\mathcal{P}$  d'équation cartésienne  $x + y + 3z + 4 = 0$ . On note S le point de coordonnées  $(1, -2, -2)$ .

**Proposition 4 :** La droite qui passe par S et qui est perpendiculaire au plan  $\mathcal{P}$  a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = 1 + 3t \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

- Dans l'ensemble  $E$  des issues d'une expérience aléatoire, on considère deux événements  $A$  et  $B$ .

**Proposition 5 :** Si  $A$  et  $B$  sont indépendants, alors  $A$  et  $\bar{B}$  sont aussi indépendants.

**EXERCICE 4** (5 points)

Dans l'espace, on considère un tétraèdre ABCD dont les faces ABC, ACD et ABD sont des triangles rectangles et isocèles en A. On désigne par E, F et G les milieux respectifs des côtés [AB], [BC] et [CA].

On choisit AB pour unité de longueur et on se place dans le repère orthonormé  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$  de l'espace.

1. On désigne par  $\mathcal{P}$  le plan qui passe par A et qui est orthogonal à la droite (DF).

On note H le point d'intersection du plan  $\mathcal{P}$  et de la droite (DF).

- (a) Donner les coordonnées des points D et F.
- (b) Donner une représentation paramétrique de la droite (DF).
- (c) Déterminer une équation cartésienne du plan  $\mathcal{P}$ .
- (d) Calculer les coordonnées du point H.
- (e) Démontrer que l'angle  $\widehat{EHG}$  est un angle droit.

2. On désigne par M un point de la droite (DF) et par t le réel tel que  $\overrightarrow{DM} = t\overrightarrow{DF}$ . On note  $\alpha$  la mesure en radians de l'angle géométrique  $\widehat{EMG}$ .

Le but de cette question est de déterminer la position du point M pour que  $\alpha$  soit maximale.

(a) Démontrer que  $ME^2 = \frac{3}{2}t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{5}{4}$ .

- (b) Démontrer que le triangle MEG est isocèle en M.

En déduire que  $ME \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ .

- (c) Justifier que  $\alpha$  est maximale si et seulement si  $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$  est maximal.

En déduire que  $\alpha$  est maximale si et seulement si  $ME^2$  est minimal.

- (d) Conclure.