LOIS DE PROBABILITÉS

Ph DEPRESLE

30 juin 2015

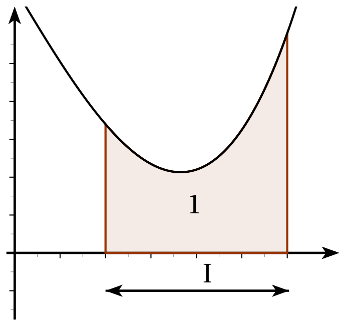
Table des matières

1 Lois de probabilités continues. Généralités

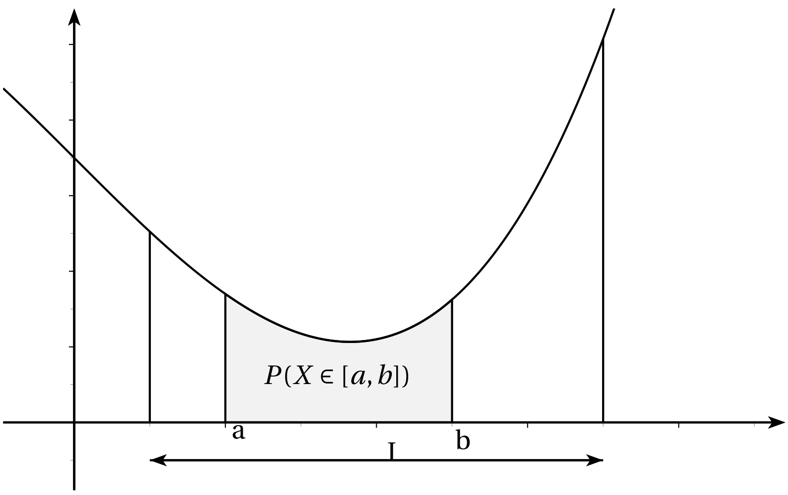
1.1 Variable aléatoire définie par une densité

Définition 1. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.*
On appelle densité de probabilité sur I toute fonction f définie sur I telle que :

- *f est continue sur I.*
- *f est positive sur I.*
- *L'aire sous la courbe de f en unités d'aire vaut 1.*

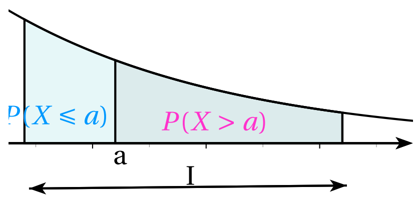


Définition 2. *Nous dirons qu'une variable aléatoire X sur I admet une densité s'il existe une fonction densité de probabilité f sur I telle que, quel que soit le segment $[a,b]$ inclus dans I, $P(X \in [a,b]) = \int_a^b f(x)dx$.*
La fonction f est appelée densité de probabilité de la variable aléatoire X.



Remarques :

- $P(X = a) = 0$
- $P(X > a) = 1 - P(X \leqslant a)$
- $P(a < X \leqslant b) = P(X \leqslant b) - P(X \leqslant a)$



1.2 Espérance mathématique et variance

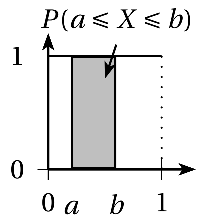
Définition 3. *Soit X une variable aléatoire continue admettant pour densité la fonction f sur l'intervalle I. On appelle espérance mathématique de X le réel s'il existe défini par $E(X) = \int_I t f(t)dt$.*

Propriétés 1. *Soit X une variable aléatoire continue sur I et qui possède une espérance et une variance et $a, b \in \mathbb{R}$ .alors :*

$$E(aX+b) = aE(X)+b \text{ et } V(aX+b) = a^2V(X)$$

2 Loi uniforme

Définition 4.
On dit que la variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[0;1]$ si X admet pour densité la fonction f égale à 1 sur $I = [0;1]$.



Pour tous réels a et b tels que $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$, $P(X \in [a,b]) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b 1\,dt = b-a$.
(on a évidemment $P(X \in [0,1]) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = 1$).

En généralisant, on dit qu'une variable aléatoire suit la loi uniforme sur le segment $[\alpha;\beta]$ si elle admet pour densité la fonction f définie sur $[\alpha;\beta]$ par : $f(x) = \dfrac{1}{\beta-\alpha}$

Ainsi, si $[a;b]$ est un intervalle inclus dans $[\alpha;\beta]$: $P(X \in [a;b]) = \dfrac{b-a}{\beta-\alpha}$

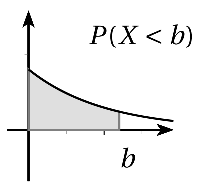
Espérance :
Si X suit la loi uniforme sur $[0;1]$, alors $E(X) = \dfrac{1}{2}$.
Si X suit la loi uniforme sur $[\alpha;\beta]$, alors $E(X) = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

3 Loi exponentielle

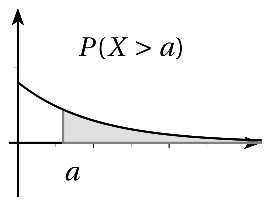
Définition 5. *On dit que la variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre le réel $\lambda > 0$, si X admet pour densité la fonction f définie sur $I = [0;+\infty[$ par : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.*

Propriétés 2.
Pour $a > 0$ et $b > a$:

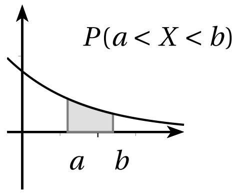
- $P(X = a) = 0$



- $P(X < b) = P(X \leqslant b) = \displaystyle\int_0^b \lambda e^{-\lambda t}\,dt = 1 - e^{-\lambda b}$



- $P(X > a) = P(X \geqslant a) = 1 - P(X < a) = e^{-\lambda a}$



- $P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,dt = \mathrm{e}^{-\lambda a} - \mathrm{e}^{-\lambda b}$

Propriétés 3. *Si X est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ, alors pour tous réels t et h strictement positifs on a :*
$P_{X\geqslant t}(X \geqslant t+h) = P(X \geqslant h)$.
On dit que la loi exponentielle est une loi sans mémoire, sans vieillissement.

Espérance :

Si X suit la loi exponentielle de paramètre λ, alors $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

Démonstration :

△**ROC** On veut calculer $E(X) = \lim\limits_{b\to+\infty} \int_0^b x f(x)dx$, où $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.
Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = x f(x) = \lambda x e^{-\lambda x}$
On cherche une primitive G de g de la forme $G(x) = (Ax+B)e^{-\lambda x}$ avec A et B deux nombres réels.
Pour tout nombre réel positif x : $G'(x) = Ae^{-\lambda x} + (Ax+B)(-\lambda e^{-\lambda x}) = (-\lambda Ax + A - \lambda B)e^{-\lambda x}$.
G est une primitive de g sur $[0;+\infty[$ si, et seulement si, $G'(x) = g(x)$ pour tout réel positif x, c'est à dire
$(-\lambda Ax + A - \lambda B)e^{-\lambda x} = \lambda x e^{-\lambda x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$
Pour que cette égalité soit vérifiée, il suffit de choisir A et B tels que $-\lambda A = \lambda$ et $A - \lambda B = 0$.
c'est-à-dire $A = -1$ et $B = \dfrac{A}{\lambda} = -\dfrac{1}{\lambda}$.
D'où $G(x) = \left(-x - \dfrac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda x}$.
Alors pour tout réel positif b :
$\int_0^b x f(x)dx = G(b) - G(0) = (-b - \dfrac{1}{\lambda})e^{-\lambda b} + \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{\lambda}(-\lambda b e^{-\lambda b} - e^{-\lambda b} + 1)$
$\lim\limits_{b\to+\infty} -\lambda b = -\infty$ et $\lim\limits_{Y\to-\infty} Ye^Y = 0$ donc $\lim\limits_{b\to+\infty} -\lambda b e^{-\lambda b} = 0$.
$\lim\limits_{b\to+\infty} -\lambda b = -\infty$ et $\lim\limits_{Y\to-\infty} e^Y = 0$ donc $\lim\limits_{b\to+\infty} e^{-\lambda b} = 0$.
Soit $\lim\limits_{b\to+\infty} -\lambda b e^{-\lambda b} - e^{-\lambda b} + 1 = 1$ et donc :
$\lim\limits_{b\to+\infty} \int_0^b x f(x)dx = \dfrac{1}{\lambda}$.
On a donc $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$. ▲

4 Loi normale centrée réduite

4.1 Théorème de Moivre-laplace

Théorème 1. *Soit $p \in]0,1[$. On suppose que, pour tout entier naturel n non nul, la variable aléatoire X_n suit une loi binomiale de paramètres n et p.*
Soit Z_n la variable aléatoire centrée réduite associée à X_n : $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.
Alors, pour tous réels a et b tels que $a < b$ on a :

$$\lim_{n\to+\infty} P(a \leqslant Z_n \leqslant b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

.

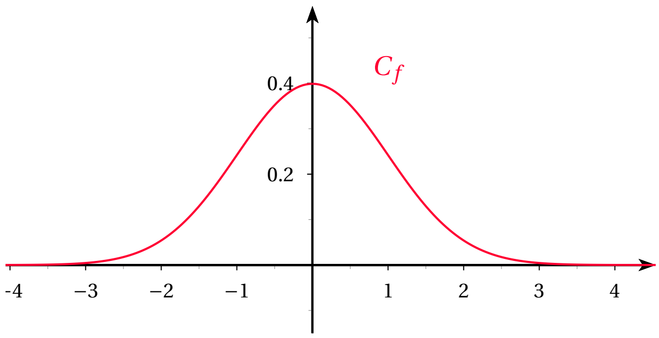
4.2 Loi normale centrée réduite

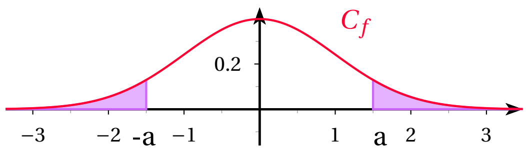
Définition 6. *On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi normale centrée réduite, notée $\mathcal{N}(0,1)$ si elle admet pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$.*

Pour tous les réels a et b tels que $a < b$ on a $P(X \in [a,b]) = \displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$

Propriétés 4.

- *Le maximum de f est atteint en 0.*
- *La fonction f est paire et donc la courbe $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.*
- *L'aire sous la courbe de f est égale à 1, elle représente la probabilité $P(X \in \mathbb{R})$.*
- *L'aire sous la courbe sur $[0,+\infty[$ est égale à $\frac{1}{2}$, donc $P(X \leqslant 0) = P(X \geqslant 0) = 0,5$*
- Pour tout réel a strictement positif, $P(X \leqslant -a) = P(X \geqslant a)$, c'est une conséquence de la symétrie de la courbe.



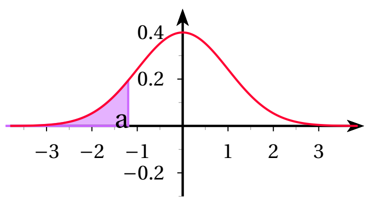
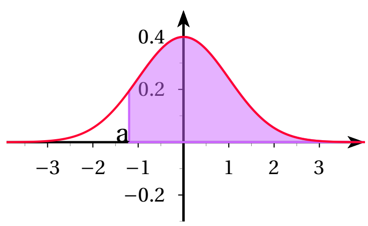


4.3 Espérance et variance

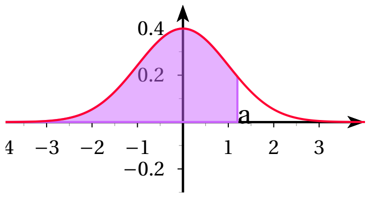
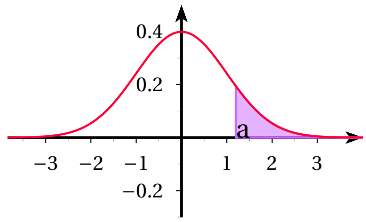
Propriétés 5. *L'espérance mathématique d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite est 0 et son écart-type est 1.*
Ceci justifie l'appellation "centrée réduite".

4.4 Calculs pour une variable aléatoire X suivant suivant $\mathcal{N}(0,1)$

- La plupart des calculatrices ne donnent que des probabilités de la forme $P(a < X < b)$, on utilise un tableau pour trouver les probabilités du type $P(X < a)$ ou $P(X > a)$.
  Pour $a < 0$

Probabilité	$P(X < a)$	$P(X > a)$
Graphique		
Calcul	$0,5 - P(a < X < 0)$	$P(a < X < 0) + 0,5$

Pour $a > 0$

Probabilité	$P(X < a)$	$P(X > a)$
Graphique		
Calcul	$0,5 + P(0 < X < a)$	$0,5 - P(0 < X < a)$

4.5 Propriété de la loi normale centrée réduite

Théorème 2. *Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite, alors pour tout réel $\alpha \in]0;1[$, il existe un unique réel strictement positif u_α tel que*

$$P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$$

.

Démonstration :
△ROC
D'après la symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$ on a pour tout réel t positif :
$P(-t \leqslant X \leqslant t) = 2P(0 \leqslant X \leqslant t) = 2\int_0^t f(x)dx = 2H(t)$ où H est la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.
La fonction H est donc continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$, et $2H$ aussi.
On a $\lim\limits_{t\to+\infty} H(t) = \frac{1}{2}$ puisque cela correspond à l'aire sous la courbe de la fonction f sur $[0;+\infty[$, c'est-à-dire à $P(X \geqslant 0)$. et $H(0) = 0$

t	0		$+\infty$
H	0	$\nearrow$	0.5

t	0		u_α		$+\infty$
$2H$	0	$\nearrow$	$1-\alpha$	$\nearrow$	1

Si $\alpha \in]0,1[, 1-\alpha \in]0,1[$ et d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel strictement positif u_α tel que $2H(u_\alpha) = 1 - \alpha$.
Soit $P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$▲

Propriétés 6. *Une valeur approchée de $u_{0,05}$ est 1,96. Une valeur approchée de $u_{0,01}$ est 2,58.*

$$P(-1,96 \leqslant X \leqslant 1,96) \simeq 1 - 0,05 \simeq 0,95$$

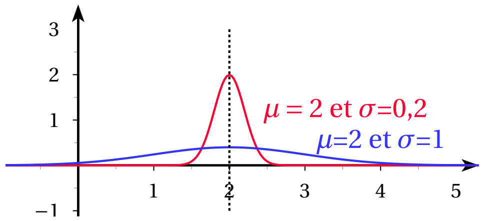
$$P(-2,58 \leqslant X \leqslant 2,58) \simeq 1 - 0,01 \simeq 0,99$$

5 Lois normales

5.1 La loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Définition 7. *Soit μ un nombre réel et σ un nombre réel strictement positif. On dit que la variable aléatoire X suit la normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ si la variable aléatoire $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.*

Soit f la fonction densité de la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est une courbe "en cloche" symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$ et d'autant plus "resserrée" autour de son axe de symétrie que σ est petit.

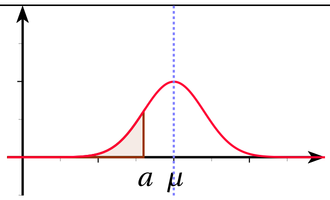
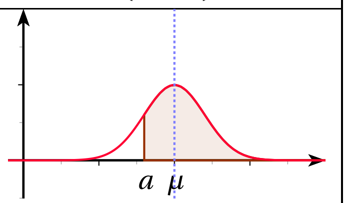


Propriétés 7. *L'espérance mathématique d'une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ est μ et son écart-type est σ.*

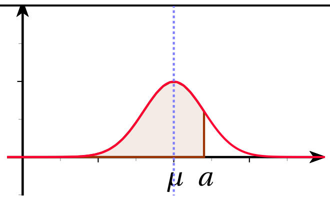
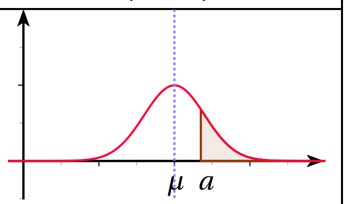
5.2 Calculs pour une variable aléatoire X suivant suivant $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

- La symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$ donne :$P(X \leqslant \mu) = P(X \geqslant \mu) = 0,5$
- La plupart des calculatrices ne donnent que des probabilités de la forme $P(a < X < b)$, on utilise un tableau pour trouver les probabilités du type $P(X < a)$ ou $P(X > a)$.

Pour $a < \mu$

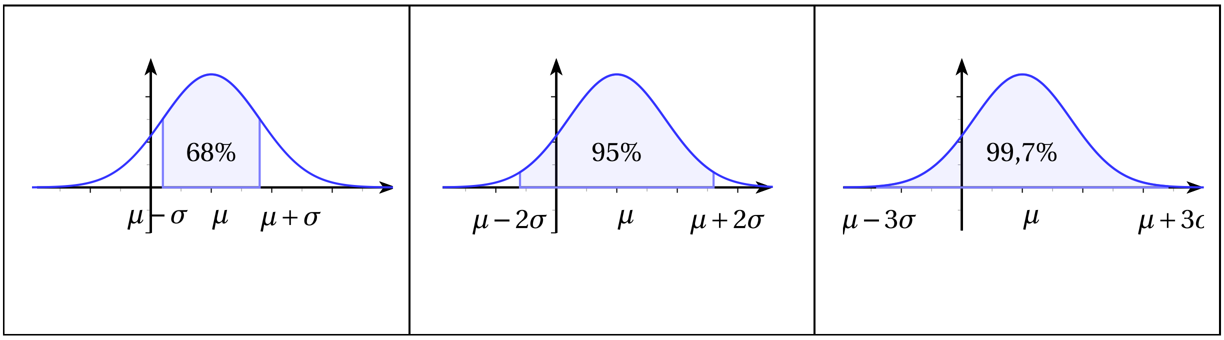
Probabilité	$P(X < a)$	$P(X > a)$
Graphique		
Calcul	$0,5 - P(a < X < \mu)$	$P(a < X < \mu) + 0,5$

Pour $a > \mu$

Probabilité	$P(X < a)$	$P(X > a)$
Graphique		
Calcul	$0,5 + P(\mu < X < a)$	$0,5 - P(\mu < X > a)$

Propriétés 8. *On a les trois intervalles suivants :*

- $P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \simeq 0,683$
- $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \simeq 0,954$
- $P(\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma) \simeq 0,997$



6 Intervalle de fluctuation

Définition 8.
On se donne un réel $\alpha \in]0,1[$ appelé coefficient de risque (petit).
Tout intervalle contenant la variable aléatoire Y avec une probabilité supérieure ou égale à $1-\alpha$ est appelé intervalle de fluctuation de la variable Y au seuil de confiance $1-\alpha$.

Théorème 3.
Soit p un réel de l'intervalle $]0,1[$.
Supposons que pour tout entier n la variable aléatoire X_n suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.
Soit un réel α dans $]0,1[$. On note u_α l'unique réel strictement positif tel que
$\displaystyle\int_{-u_\alpha}^{u_\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 1-\alpha$.
Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right) = 1-\alpha \quad \text{où} \quad I_n = \left[p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

On dit que I_n est un intervalle de fluctuation ***asymptotique*** *de la fréquence $F_n = \dfrac{X_n}{n}$ au seuil de confiance $1-\alpha$.*

Démonstration :
△ROC
Soit Z_n la variable aléatoire centrée réduite associée à X_n : $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.
D'après le théorème de Moivre-Laplace Z_n suit "à peu près" la loi normale centrée réduite :
Pour tous réels a et b, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(a \leqslant Z_n \leqslant b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$
En particulier $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(-u_\alpha \leqslant Z_n \leqslant u_\alpha) = \int_{-u_\alpha}^{u_\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 1-\alpha$
Or $P(-u_\alpha \leqslant Z_n \leqslant u_\alpha) = P\left(np - u_\alpha\sqrt{np(1-p)} \leqslant X_n \leqslant np + u_\alpha\sqrt{np(1-p)}\right)$
$P(-u_\alpha \leqslant Z_n \leqslant u_\alpha) = P\left(p - u_\alpha \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{X_n}{n} \leqslant p + u_\alpha \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right)$.▲

Remarques :
- On utilise cette approximation quand $n \geqslant 30, \quad np \geqslant 5, \quad n(1-p) \geqslant 5$
- Si $\alpha = 0.05$, alors $u_\alpha \approx 1,96$

Théorème 4. ***: Intervalle simplifié de fluctuation asymptotique à 95%***
Si la variable X_n suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{X_n}{n} \in J_n\right) \geqslant 0,95 \quad \text{avec} \quad J_n = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}, p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

L'intervalle J_n est un intervalle de fluctuation ***asymptotique*** *de la fréquence* $F_n = \dfrac{X_n}{n}$ *au seuil au moins de* $0,95$.

7 Intervalle de confiance

$\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(p-\dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant F_n \leqslant p+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \geqslant 0,95$ équivaut à $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(F_n-\dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant p \leqslant F_n+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \geqslant 0,95$.
L'intervalle $\left[F_n-\dfrac{1}{\sqrt{n}}; F_n+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est appelé intervalle de confiance asymptotique de p au niveau de confiance 95%.
En choisissant un échantillon de taille n, on obtient une réalisation f_n de F_n et donc un intervalle de la forme $\left[f_n-\dfrac{1}{\sqrt{n}}; f_n+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$.
Par abus de langage on appelle aussi intervalle de confiance cet intervalle.
Si n est "grand", une proportion d'au moins 95% des intervalles ainsi construits contiendront la proportion inconnue p.

8 Test statistique

8.1 Notion de test statistique

Construire un test de l'hypothèse nulle H_0 contre l'hypothèse alternative H_1, c'est établir un critère de décision permettant de choisir entre l'hypothèse H_0 et H_1.
H_0 est l'hypothèse privilégiée : c'est celle que l'on garde si le résultat de l'expérience n'est pas clair.
Il y a analogie entre un test d'hypothèse et un procès : tout suspect est présumé innocent et l'accusation doit apporter la preuve de sa culpabilité. Quand on accepte H_0 on ne prouve pas qu'elle est vraie, on accepte de conserver H_0 parce qu'on n'a pas pu accumuler suffisamment de preuves contre elle.

8.2 Test de conformité sur la moyenne

On veut tester l'**Hypothèse nulle** H_0 **:** $p = p_0$ contre l'**Hypothèse alternative** H_1 **:** $p \neq p_0$.

On fixe un risque α.
Si H_0 est vérifiée, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\dfrac{X_n}{n} \in \left[p-u_\alpha\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p+u_\alpha\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]\right) = 1-\alpha$

On rejette l'hypothèse H_0 si la valeur observée de $F_n = \dfrac{X_n}{n}$ est en dehors de l'intervalle de fluctuation asymptotique

$$I_n = \left[p-u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p+u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

9 QCM

1. Si une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètre $n = 100$ et $p = 02$ alors son espérance est 20.
2. Si une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{10}$ alors $P(X = 1) = 01$.

Solutions

1. L'espérance d'une loi binomiale est donnée par $E(X) = np$ oit ici $E(X) = 20$.
   La proposition est exacte.
2. $P(X = 1) = 0$.
   La proposition est fausse.

10 EXERCICES : Les exercices de base

Exercice 1

Dans tout l'exercice on arrondira à 10^{-3}.

Une jardinerie vend de jeunes plants d'arbres qui proviennent de trois horticulteurs : 35 % des plants proviennent de l'horticulteur H_1, 25 % de l'horticulteur H_2 et le reste de l'horticulteur H_3. Chaque horticulteur livre deux catégories d'arbres : des conifères et des arbres à feuilles.

La livraison de l'horticulteur H_1 comporte 80 % de conifères alors que celle de l'horticulteur H_2 n'en comporte que 50 % et celle de l'horticulteur H_3 seulement 30 %.

1. Le gérant de la jardinerie choisit un arbre au hasard dans son stock.

   On envisage les événements suivants :
   - H_1 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_1 »,
   - H_2 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_2 »,
   - H_3 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_3 »,
   - C : « l'arbre choisi est un conifère »,
   - F : « l'arbre choisi est un arbre feuillu ».

   (a) Construire un arbre pondéré traduisant la situation.

   (b) Calculer la probabilité que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur H_3.

   (c) Justifier que la probabilité de l'évènement C est égale à $0,525$.

   (d) L'arbre choisi est un conifère.
   Quelle est la probabilité qu'il ait été acheté chez l'horticulteur H_1 ?

2. On choisit au hasard un échantillon de 10 arbres dans le stock de cette jardinerie. On suppose que ce stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de 10 arbres dans le stock.

   On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de conifères de l'échantillon choisi.

   (a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

   (b) Quelle est la probabilité que l'échantillon prélevé comporte exactement 5 conifères ?

   (c) Quelle est la probabilité que cet échantillon comporte au moins deux arbres feuillus ?

Exercice 2

Dans cet exercice, sauf indication contraire, les résultats seront arrondis au centième.

1. La durée de vie, exprimée en années, d'un moteur pour automatiser un portail fabriqué par une entreprise A est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif.

   On sait que $P(X \leqslant 2) = 0,15$. Déterminer la valeur exacte du réel λ.

   Dans la suite de l'exercice on prendra $0,081$ pour valeur de λ.
2. Le vendeur de cet moteur a assuré qu'il y avait une chance sur deux pour que le moteur fonctionne plus de 8 ans. Avait-il raison ?
3. Montrer que pour tous réels positifs t et h, $P_{x \geqslant t}(X \geqslant t+h) = P(X \geqslant h)$.
4. Le moteur a déjà fonctionné durant 3 ans. Quelle est la probabilité pour qu'il fonctionne encore 2 ans ?
5. Démontrer qu'une primitive de la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

   $g(x) = \lambda x e^{-\lambda x}$ est $G(x) = -\dfrac{1}{\lambda}(\lambda x e^{-\lambda x} + e^{-\lambda x})$

   En déduire l'espérance de la variable aléatoire X et donner une interprétation de ce résultat.

Exercice 3

Une entreprise fabrique des compotes qu'elle conditionne en petits pots de 50 grammes. Elle souhaite leur attribuer la dénomination « compote allégée ».

La législation impose alors que la teneur en sucre, c'est-à-dire la proportion de sucre dans la compote, soit comprise entre 0,16 et 0,18. On dit dans ce cas que le petit pot de compote est conforme.

1. On note X la variable aléatoire qui, à un petit pot pris au hasard dans la production de la chaîne F_1, associe sa teneur en sucre.

   On suppose que X suit la loi normale d'espérance $m_1 = 0,17$ et d'écart-type $\sigma_1 = 0,006$.

   Dans la suite, on pourra utiliser le tableau ci-dessous.

α	β	$P(\alpha \leqslant X \leqslant \beta)$
0,13	0,15	0,0004
0,14	0,16	0,0478
0,15	0,17	0,4996
0,16	0,18	0,9044
0,17	0,19	0,4996
0,18	0,20	0,0478
0,19	0,21	0,0004

   Donner une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité qu'un petit pot prélevé au hasard dans la production de la chaîne F_1 soit conforme.

2. On note Y la variable aléatoire qui, à un petit pot pris au hasard dans la production de la chaîne F_2, associe sa teneur en sucre. On suppose que Y suit la loi normale d'espérance $m_2 = 0,17$ et d'écart-type σ_2.

   On suppose de plus que la probabilité qu'un petit pot prélevé au hasard dans la production de la chaîne F_2 soit conforme est égale à $0,99$.

   Soit Z la variable aléatoire définie par $Z = \dfrac{Y - m_2}{\sigma_2}$.

   (a) Quelle loi la variable aléatoire Z suit-elle ?

   (b) Déterminer, en fonction de σ_2 l'intervalle auquel appartient Z lorsque Y appartient à l'intervalle [0,16 ; 0,18].

   (c) En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de σ_2.

   On pourra utiliser le tableau donné ci-dessous, dans lequel la variable aléatoire Z suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1.

β	$P(-\beta \leqslant Z \leqslant \beta)$
2,4324	0,985
2,4573	0,986
2,4838	0,987
2,5121	0,988
2,5427	0,989
2,5758	0,990
2,6121	0,991
2,6521	0,992
2,6968	0,993

Exercice 4

Dans cet exercice, les probabilités seront arrondies au centième.

Partie A

Un grossiste achète des boîtes de thé vert chez deux fournisseurs. Il achète 80 % de ses boîtes chez le fournisseur A et 20 % chez le fournisseur B.

10 % des boîtes provenant du fournisseur A présentent des traces de pesticides et 20 % de celles provenant du fournisseur B présentent aussi des traces de pesticides.

On prélève au hasard une boîte du stock du grossiste et on considère les évènements suivants :

- évènement A : « la boîte provient du fournisseur A » ;
- évènement B : « la boîte provient du fournisseur B » ;
- évènement S : « la boîte présente des traces de pesticides ».

(a) Traduire l'énoncé sous forme d'un arbre pondéré.

(b) i. Quelle est la probabilité de l'évènement $B \cap \overline{S}$?

ii. Justifier que la probabilité que la boîte prélevée ne présente aucune trace de pesticides est égale à $0,88$.

(c) On constate que la boîte prélevée présente des traces de pesticides.
Quelle est la probabilité que cette boîte provienne du fournisseur B ?

Partie B

Le gérant d'un salon de thé achète 10 boîtes chez le grossiste précédent. On suppose que le stock de ce dernier est suffisamment important pour modéliser cette situation par un tirage aléatoire de 10 boîtes avec remise.

On considère la variable aléatoire X qui associe à ce prélèvement de 10 boîtes, le nombre de boîtes sans trace de pesticides.

(a) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

(b) Calculer la probabilité que les 10 boîtes soient sans trace de pesticides.

(c) Calculer la probabilité qu'au moins 8 boîtes ne présentent aucune trace de pesticides.

Partie C

À des fins publicitaires, le grossiste affiche sur ses plaquettes : « 88 % de notre thé est garanti sans trace de pesticides.

Un inspecteur de la brigade de répression des fraudes souhaite étudier la validité de l'affirmation. À cette fin, il prélève 50 boîtes au hasard dans le stock du grossiste et en trouve 12 avec des traces de pesticides.

On suppose que, dans le stock du grossiste, la proportion de boîtes sans trace de pesticides est bien égale à $0,88$.

On note F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 50 boîtes, associe la fréquence des boîtes ne contenant aucune trace de pesticides.

(a) Donner l'intervalle de fluctuation asymptotique de la variable aléatoire F au seuil de 95 %.

(b) L'inspecteur de la brigade de répression peut-il décider, au seuil de 95 %, que la publicité est mensongère ?

Exercice 5

Une boulangerie industrielle utilise une machine pour fabriquer des pains de campagne pesant en moyenne 400 grammes. Pour être vendus aux clients, ces pains doivent peser au moins 385 grammes. Un pain dont la masse est strictement inférieure à 385 grammes est un pain non-commercialisable, un pain dont la masse est supérieure ou égale à 385 grammes est commercialisable.

La masse d'un pain fabriqué par la machine peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu = 400$ et d'écart-type $\sigma = 11$.

Les probabilités seront arrondies au millième le plus proche

Partie A

On pourra utiliser le tableau suivant dans lequel les valeurs sont arrondies au millième le plus proche.

x	380	385	390	395	400	405	410	415	420
$P(X \leqslant x)$	0,035	0,086	0,182	0,325	0,5	0,675	0,818	0,914	0,965

(a) Calculer $P(390 \leqslant X \leqslant 410)$.

(b) Calculer la probabilité p qu'un pain choisi au hasard dans la production soit commercialisable.

(c) Le fabricant trouve cette probabilité p trop faible. Il décide de modifier ses méthodes de production afin de faire varier la valeur de σ sans modifier celle de μ.

Pour quelle valeur de σ la probabilité qu'un pain soit commercialisable est-elle égale à 96 % ? On arrondira le résultat au dixième.

On pourra utiliser le résultat suivant : lorsque Z est une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1, on a :

$P(Z \leqslant -1,751) \approx 0,040$.

Partie B

Les méthodes de production ont été modifiées dans le but d'obtenir 96 % de pains commercialisables.

Afin d'évaluer l'efficacité de ces modifications, on effectue un contrôle qualité sur un échantillon de 300 pains fabriqués.

(a) Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de pains commercialisables dans un échantillon de taille 300.

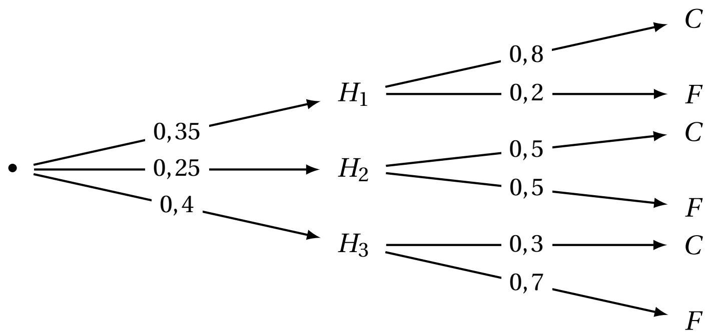
(b) Parmi les 300 pains de l'échantillon, 283 sont commercialisables.

Au regard de l'intervalle de fluctuation obtenu à la question 1, peut-on décider que l'objectif a été atteint ?

11 EXERCICES : Les exercices de base (corrigés)

Exercice 1

(a) i. L'arbre pondéré traduisant cette situation est :



ii. $P(H_3 \cap C) = P(H_3)P_{H_3}(C) = 0,4 \times 0,3 = 0,12$.

iii. Les événements H_1, H_2 et H_3 forment une partition de l'univers.
On utilise la formule des probabilités totales :
$P(C) = P(H_1)P_{H_1}(C) + P(H_2)P_{H_2}(C) + P(H_3)P_{H_3}(C)$
$P(C) = 0,35 \times 0,8 + 0,25 \times 0,5 + 0,4 \times 0,3 = 0,525$.

iv. $P_C(H_1) = \dfrac{P(H_1 \cap C)}{P(C)} = \dfrac{P(H_1)P_{H_1}(C)}{P(C)} = \dfrac{0,35 \times 0,8}{0,525} \approx 0,533$.

(b) i. En appelant succès "l'arbre choisi est un conifère", chaque tirage est une épreuve de Bernoulli, de paramètre $p = 0,525$.
Comme on suppose que le choix peut être assimilé à un tirage avec remise, ces épreuves sont indépendantes.
Le nombre de succès X obtenus en 10 épreuves suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,525$.

ii. $P(X = 5) = \dbinom{10}{5} 0,525^5 \times (1 - 0,525)^5 \approx 0,243$.

iii. $P(X \leqslant 8) = 1 - P(X = 9) - P(X = 10) \approx 0,984$. (à l'aide de la calculatrice)

Exercice 2

Pour tout $t > 0$, $P(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}$.

(a) $P(X \leqslant 2) = 0,15 \iff 0,85 = e^{-2\lambda} \iff \ln(0,85) = -2\lambda \iff \lambda = -\dfrac{\ln(0,85)}{2}$
Soit $\lambda \approx 0,081$

(b) $P(X \geqslant 8) = 1 - P(X < 8) = 1 - P(X \leqslant 8) = 1 - \left(1 - e^{-8\lambda}\right) = e^{-8\lambda} \approx 0,52 > 0,5$.
Le vendeur avait raison.

(c) Pour tous réels positifs t et h :
$P_{X \geqslant t}(X \geqslant t + h) = \dfrac{P\left[(X \geqslant t) \cap (X \geqslant t + h)\right]}{P(X \geqslant t)} = \dfrac{P(X \geqslant t + h)}{P(X \geqslant t)}$
$P_{X \geqslant t}(X \geqslant t + h) = \dfrac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = \dfrac{e^{-\lambda t}e^{-\lambda h}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h} = P(X \geqslant h)$

(d) Donc $P_{X>3}(X > 5) = P(X > 2) = 1 - P(X \leqslant 2) = 1 - 0,15 = 0,85$.

(e) $G'(x) = -\dfrac{1}{-\lambda}(\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} - \lambda^2 x\mathrm{e}^{-\lambda x} + \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}) = \lambda x e^{-\lambda x} = g(x)$

• Pour tout réel positif b, $\displaystyle\int_0^b x f(x) dx = G(b) - G(0) = -\frac{1}{\lambda}(\lambda b e^{-\lambda b} + e^{-\lambda b}) + \frac{1}{\lambda}$

$\displaystyle\lim_{b\to+\infty} -\lambda b = -\infty$, donc $\displaystyle\lim_{b\to+\infty} e^{-\lambda b} = 0$ et $\displaystyle\lim_{b\to+\infty} -\lambda b e^{-\lambda b} = 0$(croissance comparée).

• Donc $\displaystyle\lim_{b\to+\infty}\int_0^b x f(x) dx = \frac{1}{\lambda}$, ce qui signifie que $E(X) = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{0,081} \approx 12,35$.
La durée moyenne de vie d'un moteur est de $12,35$ années.

Exercice 3

1. On lit sur la table que $P(0,16 \leqslant X \leqslant 0,18) = 0,9044$.
2. (a) Par définition $Z = \dfrac{Y - m_2}{\sigma_2}$ suit la loi normale centrée réduite.

   (b) $0,16 \leqslant Y \leqslant 0,18 \iff -\dfrac{0,01}{\sigma_2} \leqslant Z \leqslant \dfrac{0,01}{\sigma_2}$

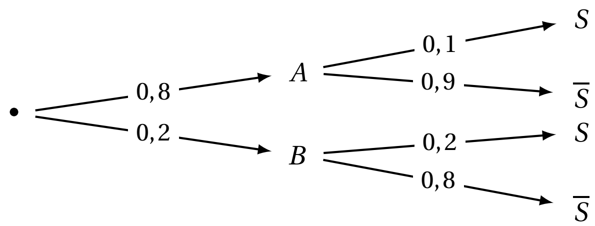
   Donc lorsque Y appartient à l'intervalle $[0,16; 0,18]$, alors Z appartient à l'intervalle $\left[-\dfrac{0,01}{\sigma_2} ; \dfrac{0,01}{\sigma_2}\right]$.

   (c) On sait que la probabilité que Z appartienne à cet intervalle est égale à $0,990$.

   On lit sur le tableau que $\dfrac{0,01}{\sigma_2} = 2,5758$, donc $\sigma_2 \approx 0,004$.

Exercice 4
Partie A

1.



2. $P\left(B \cap \overline{S}\right) = P(B)P_B\left(\overline{S}\right) = 0,2 \times 0,8 = 0,16$.
3. $\{A ; B\}$ étant une partition de l'univers, on utilise la formule des probabilités totales :
   $P\left(\overline{S}\right) = P(A)P_A\left(\overline{S}\right) + P(B)P_B\left(\overline{S}\right) = 0,8 \times 0,9 + 0,2 \times 0,8 = 0,72 + 0,16 = 0,88$.
4. $P_S(B) = \dfrac{P(B)P_B(S)}{P(S)} = \dfrac{0,2 \times 0,2}{0,12} = \dfrac{1}{3} \approx 0,33 \qquad (0,12 = 1 - p(\overline{S}))$.

Partie B

1. En appelant succès "la boîte achetée ne présente pas de trace de pesticide", chaque achat est une épreuve de Bernoulli, de paramètre $p = 0,88$.

   Comme on suppose que le stock est suffisamment important pour modéliser la situation par un tirage avec remise, ces épreuves sont indépendantes.

   Le nombre de succès X obtenus en 10 épreuves suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,88$.
2. $P(X = 10) = 0,88^{10} \approx 0,28$.
3. $P(X \geqslant 8) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) \approx 0,233 + 0,380 + 0,278 \approx 0,89$.

Partie C

1. L'intervalle de fluctuation asymptotique de F au seuil de 95 % est :
   $I = \left[p - 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$ avec $n = 50$ et $p = 0,88$.
   En simplifiant $I = [0,79\ ;\ 0,98]$.
2. L'inspecteur de la brigade de répression trouve une proportion de boîtes sans pesticides de $\dfrac{50-12}{50} \approx 0,76$.
   Or $0,76$ n'appartient pas à I, donc il décide au seuil de sécurité de 95 % que la publicité est mensongère.

Exercice 5
Partie A

1. $P(390 \leqslant X \leqslant 410) = P(X \leqslant 410) - P(X < 390) = 0,818 - 0,182 = 0,636$.
2. L'événement « le pain est commercialisable » est l'événement $(X \geqslant 385)$.
   $P(X \geqslant 385) = 1 - P(X < 385) = 1 - 0,086 = 0,914$.
3. Appelons Y la variable aléatoire représentant la masse de pain fabriqué avec les nouvelles méthodes de production.
   Y suit une loi normale de paramètres $\mu = 400$ et σ, ce qui signifie que $\dfrac{Y-400}{\sigma}$ suit une loi normale centrée réduite.
   On cherche σ pour avoir $P(Y \geqslant 385) = 0,96$, soit $P(Y < 385) = 1 - 0,96 = 0,04$
   $P(Y < 385) = P\left(\dfrac{Y-400}{\sigma} \leqslant \dfrac{385-400}{\sigma}\right) = P\left(\dfrac{Y-400}{\sigma} \leqslant -\dfrac{15}{\sigma}\right)$.
   On sait que $P\left(\dfrac{Y-\mu}{\sigma} \leqslant -1,751\right) \approx 0,040$.
   On a donc : $\dfrac{-15}{\sigma} \approx -1,751$ et donc $\sigma \approx \dfrac{15}{1,751} \approx 8,6$.
   Pour $\sigma = 8,6$ la probabilité qu'un pain soit commercialisable est 0,96.

Partie B

1. L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de pains commercialisables dans un échantillon de taille 300 est :
   $I = \left[p - 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p - 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$ avec $p = 0,96$ et $n = 300$.
   En simplifiant $I = [0,93\ ;\ 0,99]$
2. La proportion de pains commercialisables de l'échantillon de contrôle est $\dfrac{283}{300} \approx 0,94$.
   Au regard de l'intervalle de fluctuation obtenu à la question 1, on décide que l'objectif a été atteint .

Exercice 6

Partie A

Soient n un entier naturel, p un nombre réel compris entre 0 et 1, et X_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p. On note $F_n = \frac{X_n}{n}$ et f une valeur prise par F_n. On rappelle que, pour n assez grand, l'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient la fréquence f avec une probabilité au moins égale à 0,95.

En déduire que l'intervalle $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient p avec une probabilité au moins égale à 0,95.

Partie B

On cherche à étudier le nombre d'étudiants connaissant la signification du sigle URSSAF. Pour cela, on les interroge en proposant un questionnaire à choix multiples. Chaque étudiant doit choisir parmi trois réponses possibles, notées A, B et C, la bonne réponse étant la A.
On note r la probabilité pour qu'un étudiant connaisse la bonne réponse. Tout étudiant connaissant la bonne réponse répond A, sinon il répond au hasard (de façon équiprobable).

1. On interroge un étudiant au hasard. On note :
   A l'évènement « l'étudiant répond A »,
   B l'évènement « l'étudiant répond B »,
   C l'évènement « l'étudiant répond C »,
   R l'évènement « l'étudiant connait la réponse »,
   $\overline{R}$ l'évènement contraire de R.
   (a) Traduire cette situation à l'aide d'un arbre de probabilité.
   (b) Montrer que la probabilité de l'évènement A est $P(A) = \frac{1}{3}(1+2r)$.
   (c) Exprimer en fonction de r la probabilité qu'une personne ayant choisie A connaisse la bonne réponse.
2. Pour estimer r, on interroge 400 personnes et on note X la variable aléatoire comptant le nombre de bonnes réponses. On admettra qu'interroger au hasard 400 étudiants revient à effectuer un tirage avec remise de 400 étudiants dans l'ensemble de tous les étudiants.
   (a) Donner la loi de X et ses paramètres n et p en fonction de r.
   (b) Dans un premier sondage, on constate que 240 étudiants répondent A, parmi les 400 interrogés.
   Donner un intervalle de confiance au seuil de 95 % de l'estimation de p.
   En déduire un intervalle de confiance au seuil de 95 % de r.
   (c) Dans la suite, on suppose que $r = 0,4$. Compte-tenu du grand nombre d'étudiants, on considérera que X suit une loi normale.
      i. Donner les paramètres de cette loi normale.
      ii. Donner une valeur approchée de $P(X \leqslant 250)$ à 10^{-2} près.
      On utilisera la table, qui donne une valeur approchée de $P(X \leqslant t)$ où X est la variable aléatoire de la question **2. c**.

E12					=LOI.NORMALE($A12+E$1 ;240 ;RACINE(96) ;VRAI)						
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	t	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
2	240	0,500	0,504	0,508	0,512	0,516	0,520	0,524	0,528	0,533	0,537
3	241	0,541	0,545	0,549	0,553	0,557	0,561	0,565	0,569	0,573	0,577
4	242	0,581	0,585	0,589	0,593	0,597	0,601	0,605	0,609	0,612	0,616
5	243	0,620	0,624	0,628	0,632	0,636	0,640	0,643	0,647	0,651	0,655
6	244	0,658	0,662	0,666	0,670	0,673	0,677	0,681	0,684	0,688	0,691
7	245	0,695	0,699	0,702	**0,706**	0,709	0,713	0,716	0,720	0,723	0,726
8	246	0,730	0,733	0,737	0,740	0,743	0,746	0,750	0,753	0,756	0,759
9	247	0,763	0,766	0,769	0,772	0,775	0,778	0,781	0,784	0,787	0,790
10	248	0,793	0,796	0,799	0,802	0,804	0,807	0,810	0,813	0,815	0,818
11	249	0,821	0,823	0,826	0,829	0,831	0,834	0,836	0,839	0,841	0,844
12	250	0,846	0,849	0,851	0,853	0,856	0,858	0,860	0,863	0,865	0,867
13	251	0,869	0,871	0,874	0,876	0,878	0,880	0,882	0,884	0,886	0,888

Extrait d'une feuille de calcul

Solution :

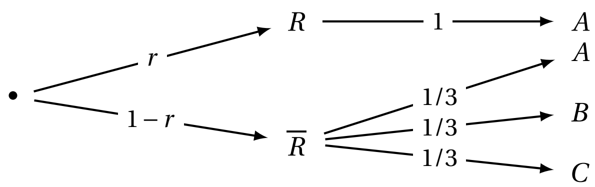
Partie A

$$f \in \left[p-\frac{1}{\sqrt{n}} ; p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right] \iff p-\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant f \leqslant p+\frac{1}{\sqrt{n}}$$
$$\iff f-\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant p \leqslant f+\frac{1}{\sqrt{n}} \iff p \in \left[f-\frac{1}{\sqrt{n}} ; f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

On a donc bien : $P\left(f \in \left[p-\frac{1}{\sqrt{n}} ; p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]\right) = P\left(p \in \left[f-\frac{1}{\sqrt{n}} ; f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]\right) \geqslant 0{,}95$

Partie B

1. (a)



(b) Les événements $R, \overline{R}$ constituent une partition de l'univers, on utilise la formule des probabilités totales :
$P(A) = P(R)P_R(A) + P\left(\overline{R}\right)P_{\overline{R}}(A) = r + \frac{1}{3}(1-r) = \frac{1}{3}(1+2r)$.

(c) On a : $P_A(R) = \frac{P(A\cap R)}{P(A)} = \frac{3r}{1+2r}$.

2. (a) En appelant succès « l'étudiant a la bonne réponse »chaque choix est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = P(A)$.
Comme on suppose que le choix revient à effectuer un tirage avec remise, ces épreuves sont indépendantes.
Le nombre de succès X obtenu en interrogeant $n = 400$ étudiants suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 400$ et $p = P(A)$.

(b) On a $n = 400$ et $f = \frac{240}{400} = 0{,}6$. $n \geqslant 30$, $nf \geqslant 5$ et $n(1-f) \geqslant 5$
Un intervalle de confiance au seuil de 95 % de l'estimation de p est :

$$\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}} \;;\; f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right] = [0{,}55 \;;\; 0{,}65].$$

0r :
$$0{,}55 \leqslant p \leqslant 0{,}65 \iff 0{,}55 \leqslant \frac{1}{3}(1+2r) \leqslant 0{,}65$$
$$\iff 0{,}325 \leqslant r \leqslant 0{,}475$$
Un intervalle de confiance au seuil de 95 % de r est donc : $[0{,}325 \;;\; 0{,}475]$.

(c) i. On suppose que $r = 0{,}4$, donc $p = \frac{1}{3}(1+2r) = 0{,}6$.
L'espérance de X est $E(X) = np = 240$
La variance de X est $V(X) = np(1-p) = 96$.
On approche la loi de X par la loi normale de paramètres $\mu = 240$ et $\sigma = \sqrt{96}$.

ii. On lit sur la table : $P(X \leqslant 250) \approx 0{,}846$.